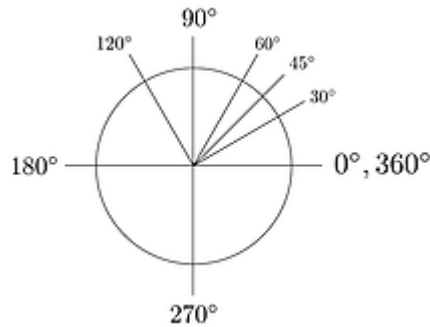


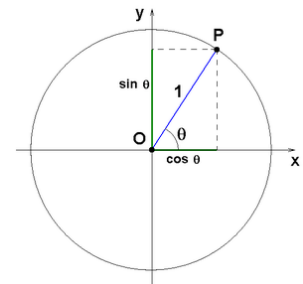
PARAGRAAF 8.1 : EENHEIDSCIRKEL

LES 1 : DE EENHEIDSCIRKEL



THEORIE EENHEIDSCIRKEL EN GRADEN

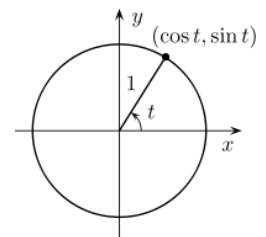
- Eenheidscirkel = { Cirkel met middelpunt O en straal 1 }
- $\cos(\theta) = \frac{x\text{-coördinaat}}{1} \rightarrow x = \cos(\theta)$
- $\sin(\theta) = \frac{y\text{-coördinaat}}{1} \rightarrow y = \sin(\theta)$
- Ieder punt P op de cirkel geldt : $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$



VOORBEELD 1 : GRADEN EN COÖRDINATEN

Kijk naar de eenheidscirkel. Bereken de coördinaten als

- $t = 90$
- $t = 22$

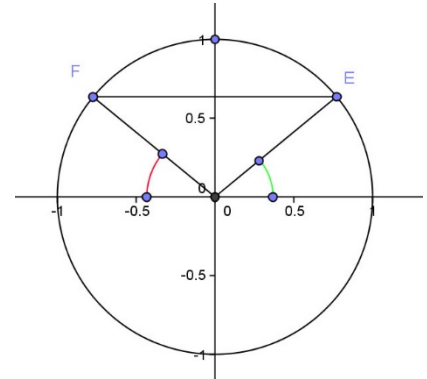


OPLOSSING 1

- Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos(90), \sin(90)) = (0, 1)$
- Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos(22), \sin(22)) = (0,93 ; 0,37)$

VOORBEELD 2

Bereken de hoek van E en F als je weet dat $y_F = 0,8$.



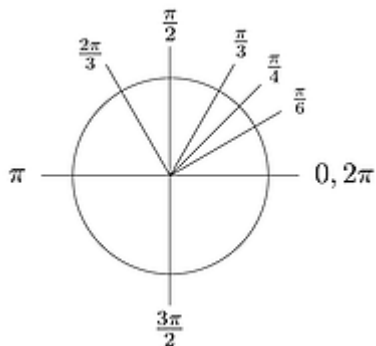
OPLOSSING 2

(1) Je weet dat $y = \sin(t) = 0,8 \rightarrow t = \sin^{-1}(0,8) = 53^\circ$.

(2) De andere hoek is dan $180 - 53 = 127^\circ$

PARAGRAAF 8.2 : RADIALEN

LES 1 : RADIALEN



THEORIE EENHEIDSCIRKEL EN RADIALEN

- Radiaal = { Afstand (in cm) die iemand heeft afgelegd als hij over de rand van de cirkel loopt }
- De omtrek van de cirkel = $2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$
- $2\pi \text{ rad} = 360 \text{ graden} \rightarrow \pi \text{ rad} = 180 \text{ graden}$. In een tabel :

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

Dus $180 \text{ graden} = \pi \text{ rad}$

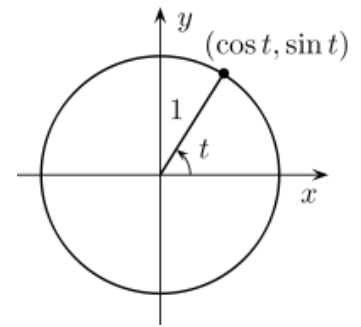
$$1 \text{ graad} = \frac{1}{180} \pi \text{ rad}$$

- Voor ieder punt P op de cirkel geldt : $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$
- Je wisselt op de GR tussen graden en radialen via de knop MODE.

VOORBEELD 2 : RADIALEN

Kijk naar de eenheidscirkel. Bereken de coördinaten als

- $t = 1\frac{1}{2}\pi$
- $t = 1\frac{1}{3}\pi$
- $t = 5 \text{ (rad)}$

**OPLOSSING 2**

- Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos(1\frac{1}{2}\pi), \sin(1\frac{1}{2}\pi)) = (0, -1)$
- Dit mag gewoon op de GR : $(x, y) = (\cos(1\frac{1}{3}\pi), \sin(1\frac{1}{3}\pi)) = (-0,5; -0,87)$
- Dit betekent dat je 5 cm over de cirkel gelopen hebt !!!
Realiseer je dat dat een waarde is tussen $\pi = 3,14$ en $2\pi = 6,28$
Op de GR : $(x, y) = (\cos(5), \sin(5)) = (0,28; -0,96)$

VOORBEELD 3 : HOEK BEREKENEN

Bereken de hoek α , met α in radialen. ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$)

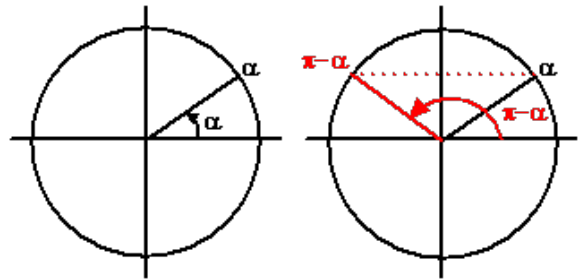
- $y = 0,72$
- $x = 0,18$

OPLOSSING 3

- $\sin(\alpha) = 0,72 \rightarrow \alpha = \sin^{-1}(0,72) = 0,80$ (cm)

Uit het plaatje hiernaast zie je dat er nog een oplossing is, waarbij de $y = 0,72$

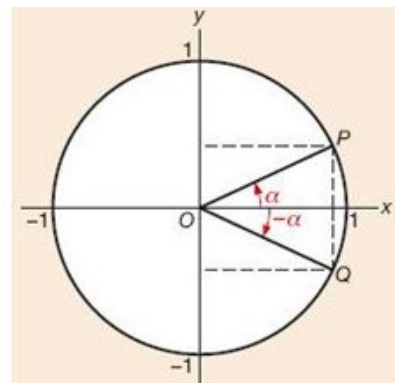
$$\alpha = \pi - 0,80 = 3,14 - 0,80 = 2,34$$



- $\cos(\alpha) = 0,18 \rightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,18) = 1,39$ (cm)

Uit het plaatje hiernaast zie je dat er nog een oplossing is, waarbij de $x = 0,18$

$$\alpha = 2\pi - 1,39 = 6,28 - 1,39 = 4,89$$



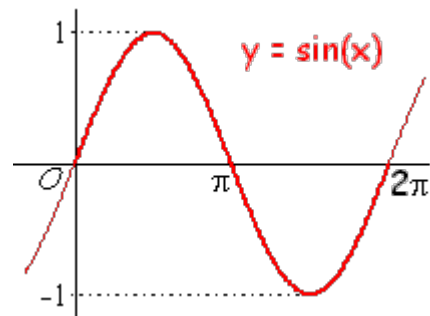
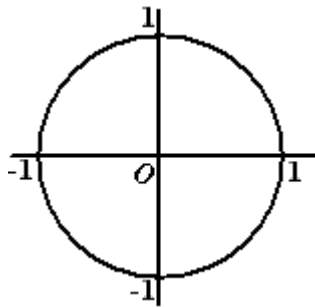
PARAGRAAF 8.3 : TRANSFORMATIES EN SINUSÖIDEN

LES 1 TRANSFORMATIES

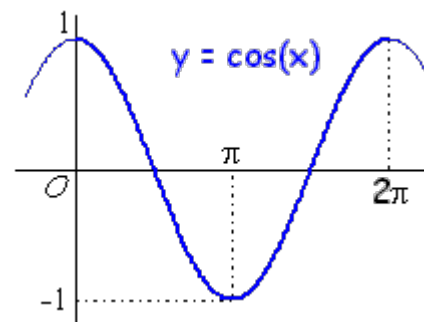
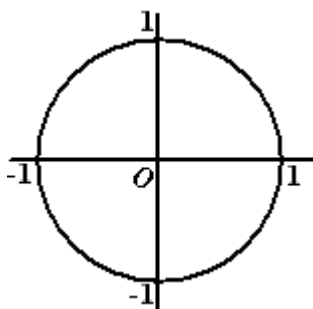
DE GRAFIEKEN VAN $y = \sin(x)$ EN $y = \cos(x)$

De grafieken van $y = \sin(x)$ EN $y = \cos(x)$ kun je uit de eenheidscirkel halen :

(1) $y = \sin(x)$ (de y-coördinaat in de eenheidscirkel)



(2) $y = \cos(x)$ (de x-coördinaat in de eenheidscirkel)



TRANSFORMEREN VAN GONIOGRAFIEKEN

Je hebt al twee regels geleerd bij transformeren. Je leert nu ook de laatste regel :

REGELS BIJ TRANSFORMEREN

$$(1) f(x) \xrightarrow{T(a,b)} f(x - a) + b$$

$$(2) f(x) \xrightarrow{V_{x-as,c}} c \cdot f(x)$$

$$(3) f(x) \xrightarrow{V_{y-as,c}} f\left(\frac{1}{c} \cdot x\right)$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = \sin(x)$. Bepaal de formule die ontstaat als :

- f eerst 5 naar rechts / 2 omlaag en vervolgens vermenigvuldigd wordt met 3 t.o.v. de x-as.
- f eerst vermenigvuldigd wordt met -2 t.o.v. de y-as en dan 3 naar links verschoven wordt.
- Geef de transformaties die nodig zijn om tot de formule $g(x) = -2 + 3\sin(3x + \frac{1}{3}\pi)$

OPLOSSING 1

$$a. \sin(x) \xrightarrow{T(5,-2)} \sin(x - 5) - 2 \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot (\sin(x - 5) - 2) = 3\sin(x - 5) - 6$$

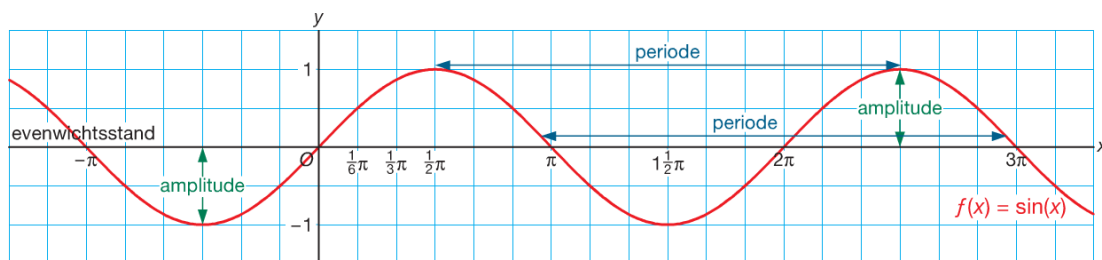
$$b. \sin(x) \xrightarrow{V_{y-as,-2}} \sin\left(\frac{1}{-2}x\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right) \xrightarrow{T(-3,0)} \sin\left(-\frac{1}{2}(x + 3)\right)$$

$$c. \sin(x) \xrightarrow{V_{x-as,3}} 3 \cdot \sin(x) \xrightarrow{T\left(-\frac{1}{3}\pi,-2\right)} 3\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) - 2 \xrightarrow{V_{y-as,\frac{1}{3}}} 3\sin\left(3x + \frac{1}{3}\pi\right) - 2$$

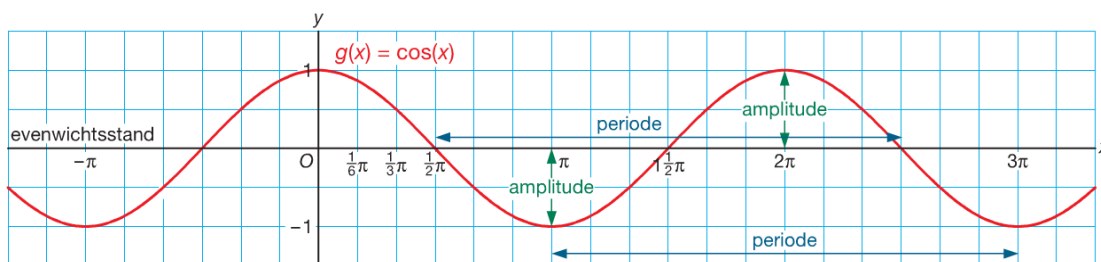
LES 2 : TEKENEN VAN EEN GONIOFORMULE

DEFINITIE

Gegeven is gonioformule $y = a + b \sin c(x - d)$



of $y = a + b \cos c(x - d)$.



Hierin is:

(1) a = evenwichtsstand

(2) b = amplitude

(3) $c = \frac{2\pi}{\text{periode}}$ of $\text{periode} = \frac{2\pi}{c}$

(4) d = verschuiving met

$x + d$ = verschuiving d naar links

$x - d$ = verschuiving d naar rechts

STAPPENPLAN TEKENEN GONIO-FORMULE $Y = A + B \sin C (X - D)$

- (1)** Teken eerst de formule $y = a + b \sin cx$ (dus zonder verschuiving d)
- (2)** Verschuif de eerste grafiek d naar links / rechts

VOORBEELD 1

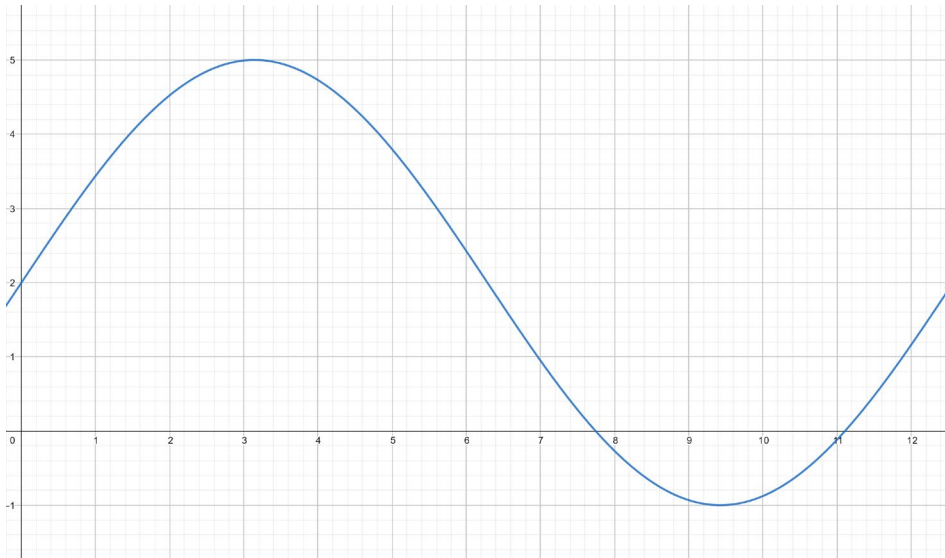
Teken op domein $[0, 2\pi]$ de formule $f(x) = 2 + 3\sin\frac{1}{2}(x - 1)$

OPLOSSING 1

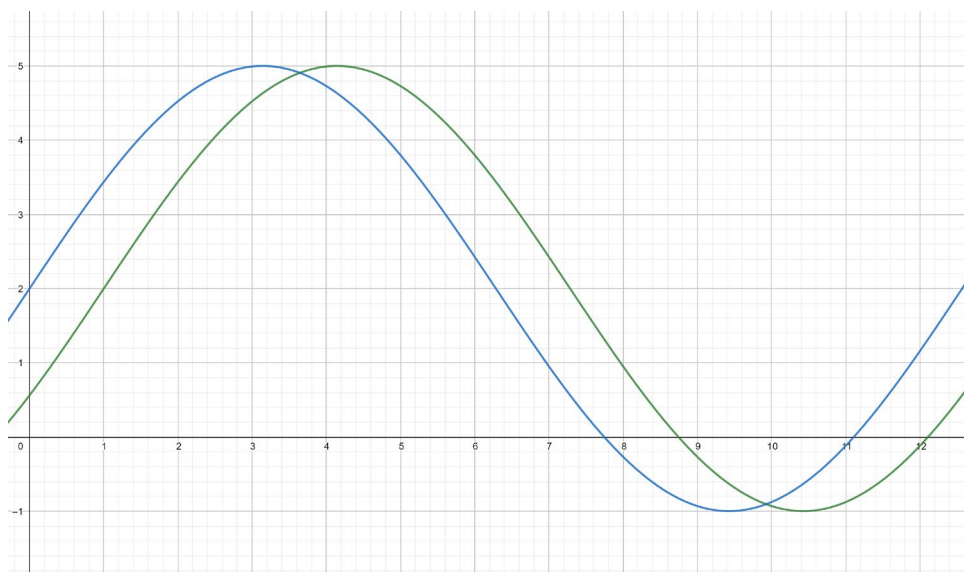
a. (1) $a = \text{evenwichtsstand} = -2$

$$b = \text{amplitude} = 3$$

$$\text{periode} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi (\approx 12,57)$$

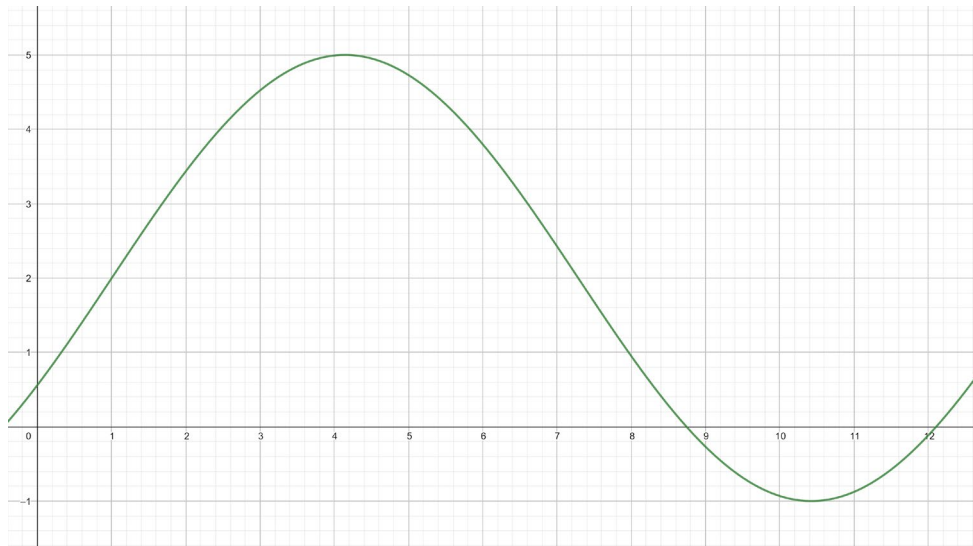


(2) $-1 = \text{verschuiving 1 naar links}$



OPMERKING

Je kunt ook direct de grafiek tekenen. Je moet dan als start van de grafiek het punt (*verschuiving, evenwichtsstand*) = (1,2) nemen voor de sinusgrafiek.



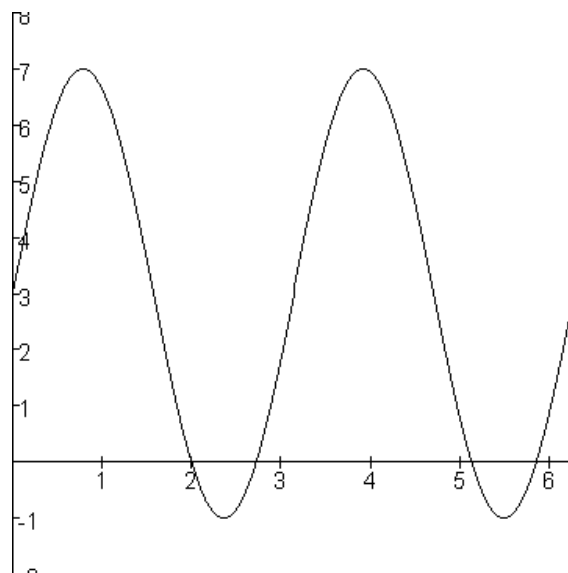
PARAGRAAF 8.4 : FORMULES VAN SINUSOÏDEN OPSTELLEN

LES 2 BEPALEN VAN EEN GONIOFORMULE

VOORBEELD 1

Bepaal de formule van de grafiek

- a. Als het een sinusgrafiek is
- b. Als het een cosinusgrafiek is.



OPLOSSING 1

a.

(1) $a = \text{evenwichtsstand} = \frac{7 + (-1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

(2) $b = \text{amplitude} = 7 - 3 = 4$

(3) $\text{periode} = 4 - 1 = 3$ (Van top tot top) dus $c = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

(4) Bij de sinusgrafiek start in de evenwichtsstand en dat doet deze grafiek ook dus $d = 0$

Dus : $y = 3 + 4 \sin\left(\frac{2}{3}\pi x\right)$

b. De stappen 1 t/m 3 zijn gelijk

(4) De cosinusgrafiek start in het maximum en dat is bij $t = 1$, dus is de grafiek 1 naar rechts verschoven

Dus : $y = 3 + 4 \cos\left(\frac{2}{3}\pi(x - 1)\right)$

PARAGRAAF 8.5 : GONIOMETRISCHE VERGELIJKINGEN

LES 1 : GONIO-VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

Om goniometrische vergelijkingen op te lossen moet je gebruik maken van een aantal gegevens

I. DE STANDAARDTABEL

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
rad	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1

OPMERKING

- Uit deze tabel kun je bijv. aflezen dat $\sin(\frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{2}$ of $\cos(0) = 1$.
- Als de waarde negatief is, tel je er π bij op. Dus bijv.

$$\sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

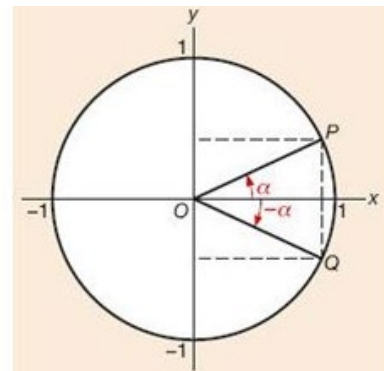
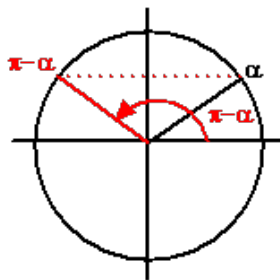
II. DE GONIO VERGELIJKINGS REGELS :

$$(1) \quad \sin(A) = \sin(B)$$

$$A=B+k \cdot 2\pi \quad \vee \quad A=\pi-B+k \cdot 2\pi$$

$$(2) \quad \cos(A) = \cos(B)$$

$$A=B+k \cdot 2\pi \quad \vee \quad A=-B+k \cdot 2\pi$$



Kijk naar de plaatjes om te begrijpen waarom de regels zo zijn !!!!

III. EEN STAPPENPLAN

Stappenplan Gonio-vergelijking oplossen

- (1) Zorg dat er links geen getal voor de sin of cos staat
- (2) Zet de rechtse waarde om in een sin/cos-waarde m.b.v. de standaardtabel
- (3) Gebruik bovenstaande regel om de vergelijking verder op te lossen
- (4) Schrijf alle oplossingen op die binnen het domein liggen

VOORBEELD 1

Los exact op

- a. $\sin(x) = 1$
 b. $2\cos(x) = 1$ met domein $[0, 4\pi]$
 c. $4\cos(2x) = -2\sqrt{3}$

OPLOSSING 1

- a. (2) $\sin(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$
 (3) $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (zelfde)
 $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$
- b. (1) $\cos(x) = \frac{1}{2}$
 (2) $\cos(x) = \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)$
 (3) $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$
 (4) $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = 2\frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi \vee x = 3\frac{2}{3}\pi$
- c. (1) $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 (2) $\cos(x) = \cos\left(1\frac{1}{6}\pi\right)$
 (3) $x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$