PARAGRAAF 10.1 : PRIMITIEVEN EN INTEGRALEN

LES 1 RIEMANN-SOM

DEFINITIE RIEMANN-SOM

Een oppervlakte kun je benaderen met behulp van een Riemann-som = $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$.

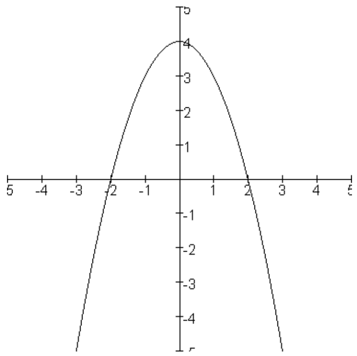
a. Schets de grafiek van -3 tot 3.

b. Benader de oppervlakte tussen f(x) en de x-as met een Riemann-som en Δx=1.

c. Benader de oppervlakte tussen f(x) en de x-as met een Riemann-som en Δx= ½ .

OPLOSSING 1

a. De snijpunten met de x-as zijn x=-2 en x=2. Teken rechthoekjes van 1 breed en neem de gemiddelde hoogte op het interval. Er zijn dus 4 rechthoekjes !



Je kunt met een Riemann-som (rechthoekjes van 1 breed) de oppervlakte uitrekenen

- Oppervlakte = $\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\cdot\Delta x = f(x_1)\cdot\Delta x + f(x_2)\cdot\Delta x + f(x_3)\cdot\Delta x + f(x_4)\cdot\Delta x$

(1) Rechthoek I van 1 tot 2 $\rightarrow Opp\ I = f(x)\cdot\Delta x = f\left(1\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = 1\frac{3}{4}\cdot 1 = 1\frac{3}{4}$

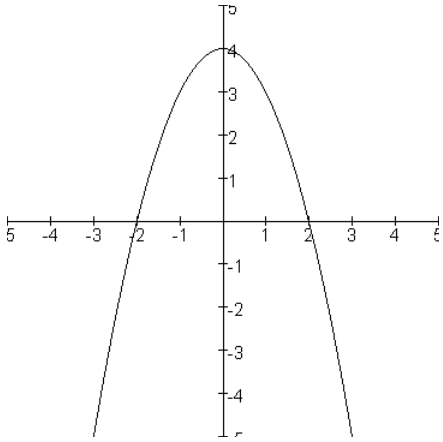
(2) Rechthoek II van 0 tot 1 $\rightarrow Opp\ II = f(x)\cdot\Delta x = f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = 3\frac{3}{4}\cdot 1 = 3\frac{3}{4}$

(3) Rechthoek III van -1 tot 0 $\rightarrow Opp\ III = f(x)\cdot\Delta x = f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = 3\frac{3}{4}\cdot 1 = 3\frac{3}{4}$

(4) Rechthoek IV van -2 tot -1 $\rightarrow Opp\ IV = f(x)\cdot\Delta x = f\left(-1\frac{1}{2}\right)\cdot 1 = 1\frac{3}{4}\cdot 1 = 1\frac{3}{4}$

Totale oppervlakte benadering = 1 ¾ $+$ 3 ¾ $+$ 3 ¾ $+$ 1 ¾ $= 11$

b. De snijpunten met de x-as zijn x=-2 en x=2. Teken rechthoekjes van ½ breed en neem de gemiddelde hoogte op het interval.



- Oppervlakte RECHTS :

(1) Rechthoek I van 1½ tot 2 $\rightarrow Opp I = f(x) \cdot \Delta x = f\left(1\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \;=\; 0{,}9375 \;\cdot \frac{1}{2} = \cdots$

(2) Rechthoek II van 1 tot 1½ $\rightarrow Opp II = f(x) \cdot \Delta x = f\left(1\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \;=\; 2{,}4375 \;\cdot \frac{1}{2} = \cdots$

(3) Rechthoek III van ½ tot 1 $\rightarrow Opp III = f(x) \cdot \Delta x = f\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \;=\; 3{,}4375 \;\cdot \frac{1}{2} = \cdots$

(4) Rechthoek IV van 0 tot ½ $\rightarrow Opp IV = f(x) \cdot \Delta x = f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \;=\; 3{,}9375 \;\cdot \frac{1}{2} = \cdots$

Totale Oppervlakte RECHTS **= 5,375**

- Aangezien de grafiek symmetrisch is , is Opp RECHTS = Opp LINKS :
- Dus de Totale oppervlakte benadering = $2 \cdot 5{,}375 \;=\; 10{,}75$

OPMERKING

- Je ziet dat de 2^e benadering (uiteraard) beter is !
- Hoe kleiner de rechthoekjes, hoe beter de benadering !!

LES 2 REGELS VOOR PRIMITIVEREN

DEFINITIE INTEGRAAL EN OPPERVLAKTE

- Als je de Δx heel klein maakt (mini) dan noemen we hem dx
- De som Σ gaat over in ∫ !!!
- Er geldt dan dat de oppervlakte tussen de grenzen x=a en x=b : $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) \cdot dx$
- Oppervlakte = $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

DEFINITIE PRIMITIVEREN / INTEGREREN

- Integreren of primitiveren is het omgekeerde van differentiëren.
- Notatie Primitieve : *F(x)*

VOORBEELD 1

Denk aan de regel : *Integreren is het omgekeerde van differentiëren.*

Wat is dan de primitieve van :

a. $f(x) = 4$

b. $f(x) = 2x$

c. $f(x) = 24x^5$

OPLOSSING 1

a. $F(x) = 4x + c \quad want\ F'(x) = 4$

b. $F(x) = x^2 + c \quad want\ F'(x) = 2x$

c. $F(x) = 4x^6 + c \quad want\ F'(x) = 24x^5$

OPMERKING

- Bij iedere formule horen miljoenen primitieven (c kan verschillend zijn).
- c = { integratieconstante }

REGELS VOOR INTEGREREN VAN POLYNOMEN (XN)

(1) Hoofdregel : $f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$

(2) Hulpregel : $f(x) = a \quad \Rightarrow \quad F(x) = ax$

VOORBEELD 1

Primitiveer met behulp van de regels hierboven :

a. $f(x) = x^7 + 5x^4$

b. $f(x) = \sqrt{x}$

c. $f(x) = \frac{3}{x^4}$

OPLOSSING 1

Primitiveer met behulp van de regels hierboven :

a. $F(x) = \frac{1}{7+1}x^{7+1} + 5\frac{1}{4+1}x^{4+1} = \frac{1}{8}x^8 + x^5$

b. $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{1{,}5}x^{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

c. $f(x) = 3x^{-4} \;\rightarrow\; F(x) = 3 \cdot \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} = -1x^{-3} = -\frac{1}{x^3}$

HUISWERK 2 : PRIMITIVEER

a. $f(x) = x^3$

b. $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

c. $f(x) = 3x^7$

d. $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x^2}$

e. $f(x) = 5x^2 + 6x - 22$

f. $f(x) = \dfrac{6}{5x^3}$

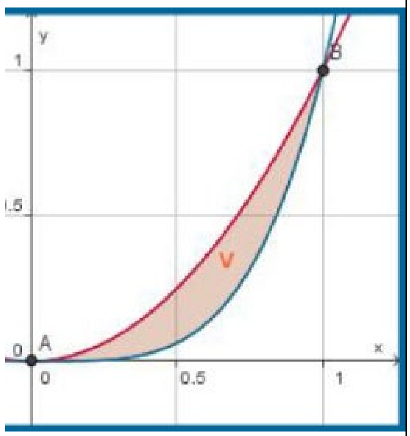
g. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

h. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

PARAGRAAF 10.2 : OPPERVLAKTE EN INHOUDEN

LES 1 OPPERVLAKTE BEREKENEN TUSSEN F EN G

STAPPENPLAN VOOR DE OPPERVLAKTE TUSSEN F(X) EN G(X)



1. Maak een schets
2. Bereken de snijpunten van f en g (deze x-en noemen we a en b)
3. Oppervlakte (Opp) tussen f en g =

$$Opp = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_a^b v(x)dx = V(b) - V(a)$$

(Waarbij v(x) de verschilfunctie tussen f en g is, met f BOVEN g)

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$

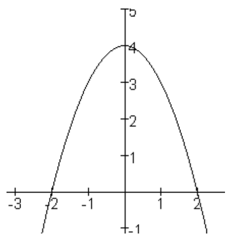
a. Bereken exact de oppervlakte tussen f(x) en de x-as.

b. Bereken exact de oppervlakte tussen f(x) en de lijn y=3.

OPLOSSING 1

a. Volg het stappenplan :

1. De grafiek van f



2. $f(x) = 0$ $\quad 4 - x^2 = 0$

$x = 2 \vee x = -2$

3. De grenzen zijn -2 en 2. De x-as heeft vergelijking y=0 :

- Oppervlakte = $\int_{-2}^{2} (f(x) - 0)dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx$
- $F(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$
- $F(2) = 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot (2)^3 = \frac{16}{3}$
- $F(-2) = 4 \cdot -2 - \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 = -\frac{16}{3}$
- Oppervlakte = $F(2) - F(-2) = \frac{16}{3} - -\frac{16}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}$

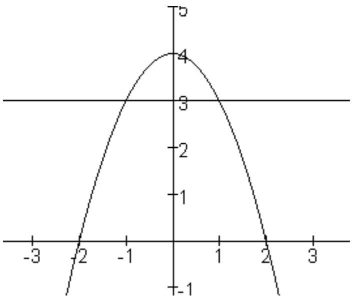
OPMERKING

Stap 3 kan ook in één regel. De primitieve staat dan tussen rechte haken :

$$Opp = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = [4x - \tfrac{1}{3}x^3]_{-2}^{2} = (4\cdot 2 - \tfrac{1}{3}\cdot 2^3) - (4\cdot -2 - \tfrac{1}{3}\cdot(-2)^3) = \tfrac{16}{3} - -\tfrac{16}{3} = \tfrac{32}{3} = 10\tfrac{2}{3}$$

b. Volg het stappenplan :

1. De grafiek van f



2. $f(x) = 3$

$4 - x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = 1 \; v \; x = -1$

3. De grenzen zijn -1 en 1. De x-as heeft vergelijking y=0 :

- Oppervlakte = $\int_{-1}^{1}(f(x)-3)dx = \int_{-1}^{1}(4-x^2-3)dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx =$
- $F(x) = x - \frac{1}{3}x^3$
- $F(1) = \frac{2}{3} \quad en \quad F(-1) = -\frac{2}{3}$
- $Opp = F(1) - F(-1) = \frac{2}{3} - -\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

OPMERKING

Je kunt het ook met de GR berekenen (controleren) met de knop Math > FnInt

LES 2 : WENTELEN OM DE X-AS

STAPPENPLAN <u>INHOUD</u> VAN OMWENTELINGSLICHAAM L TUSSEN F(X) EN DE Y-AS

(1) Maak een schets

(2) Bereken de snijpunten van f en met de y-as (deze noemen we a en b)

(3) Inhoud =som van de cirkeltjes = som van $\pi \cdot r^2$ = $\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx$

STAPPENPLAN <u>INHOUD</u> VAN OMWENTELINGSLICHAAM L TUSSEN F(X) EN DE G(X)

(1) Maak een schets

(2) Bereken de snijpunten van f en g (deze noemen we a en b)

(3) Inhoud = som van de cirkeltjes grootste - som van de cirkeltjes kleinste

Inhoud = $\int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx - \int_a^b \pi \cdot (g(x))^2 \, dx$

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie $f(x) = 4 - x^2$. V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de x-as. V wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat het omwentelingslichaam L.

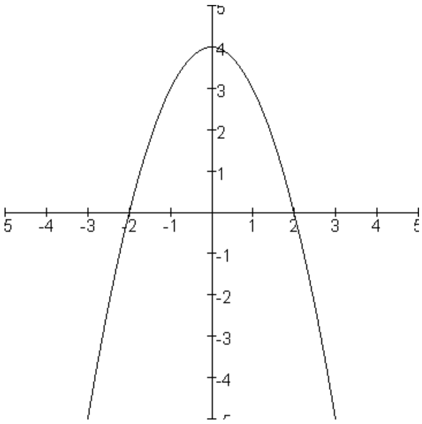
a. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam L in 2 dec.

W is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijn y=3. W wordt gewenteld om de x-as. Zo ontstaat het omwentelingslichaam M.

b. Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam M in 2 dec.

OPLOSSING 1

a.



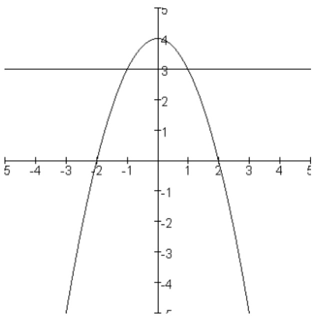
$$Inhoud = \int_{-2}^{2} \pi \cdot (4 - x^2)^2 dx = \int_{-2}^{2} \pi \cdot (16 - 8x^2 + x^4) dx = \pi \cdot (17{,}07 - -17{,}07) = 107{,}23$$

$$F(x) = 16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$F(2) = 16 \cdot 2 - \frac{8}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{5} \cdot 2^5 = 17{,}07$$

$$F(-2) = 16 \cdot -2 - \frac{8}{3} \cdot (-2)^3 + \frac{1}{5} \cdot (-2)^5 = -17{,}07$$

b.



$$Inhoud = \int_{-1}^{1} \pi \cdot (4 - x^2)^2 dx - \int_{-1}^{1} \pi \cdot (3)^2 dx -= \int_{-1}^{1} (\pi \cdot (16 - 8x^2 + x^4) - 9\pi) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \pi \cdot (7 - 8x^2 + x^4) dx = (14{,}24 - -14{,}24) = 28{,}48$$

$$F(x) = \pi \cdot (7x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5)$$

$$F(1) = \pi \cdot (7 \cdot 1 - \frac{8}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{5} \cdot 1^5) = 14{,}24$$

$$F(-1) = \pi \cdot (7 \cdot -1 - \frac{8}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{5} \cdot (-1)^5) = -14{,}24$$

PARAGRAAF 10.3 : PRIMITIEVE FUNCTIES

LES 1 ANDERE REGELS VOOR PRIMITIVEREN /INTEGREREN

REGELS VOOR ALLE SOORTEN FORMULES

Er zijn nog een aantal regels. We geven de regels voor c = 0 :

$(i) \quad f(x) = x^n \qquad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

$(ii) \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = ln(\,x)$

$(iii) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow F(x) = e^x$

LES 2 VERDELEN IN TWEE DELEN

VOORBEELD 1

Gegeven is de functie f(x) = x^2.

V is het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f, de x-as en de lijn x=5.

De lijn x=a verdeelt V in de verhouding 2 : 1.

Bereken a in 2 decimalen nauwkeurig.

OPLOSSING 1

$$Opptotaal = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 (x^2)dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^5 = \frac{1}{3}\cdot 5^3 = \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3}$$

De oppervlakte van het linkerdeel is dan $= \frac{2}{3}\cdot\frac{125}{3} = \frac{250}{9}$

$$Opplinks = \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (x^2)dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^a = \frac{1}{3}a^3 = \frac{250}{9}$$

$$\rightarrow a^3 = \frac{750}{9} \rightarrow a = 4{,}37$$

LES 3 PRIMITIVEREN EN KETTINGREGEL

VOORBEELD 1

Primitiveer

$f(x) = 14(4x-2)^6$

OPLOSSING 1

Neem u = 4x – 2 dan is u'= 4. Omdat integreren het tegenovergestelde van differentiëren is, moet je die 4 corrigeren.

Dus kettingregel bij primitiveren → · ¼. Dus

$$F(x) = F(u) \cdot U = 14 \cdot \frac{1}{7}u^7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}u^7 = \frac{1}{2}(4x-2)^7$$