# PARAGRAAF 11.1 : GONIOMETRISCHE FORMULES

## OMSCHRIJFREGELS VOOR SIN(X) EN COS(X)

Er zijn een aantal omschrijfregels die je soms nodig hebt om goniovergelijkingen op te lossen:

(1) $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

(2) $-sin(x) = sin(x + \pi)$

(3) $-cos(x) = cos(x + \pi)$

(4) $sin(x) = cos(x - ½\pi)$ { ½π naar rechts }

(5) $cos(x) = sin(x + ½\pi)$ { ½π naar links }

(6) $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$

## REGELS OPLOSSEN GONIO-VERGELIJKING

### (1) DE STANDAARDTABEL

| rad | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sin $\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| cos $\alpha$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

Als de waarde negatief is, tel je er $\pi$ bij op. Dus bijv. $sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$

### (2) DE GONIO VERGELIJKINGS REGELS :

$sin(A) = sin(B)$

$A = B + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$cos(A) = cos(B)$

$A = B + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; A = -B + k \cdot 2\pi$

### (3) HET STAPPENPLAN

**STAPPENPLAN GONIO-VERGELIJKING OPLOSSEN**

(1) Zorg dat er links geen getal voor de sin of cos staat

(2) Zet de rechtse waarde om in een sin/cos-waarde m.b.v. de standaardtabel

(3) Gebruik bovenstaande regel om de vergelijking verder op te lossen

(4) Schrijf alle oplossingen op die binnen het domein liggen

## VOORBEELD 1

Los exact op

**a.** $sin(x+\pi) = -1$

**b.** $sin(x) - cos^2(x) = -1$

## OPLOSSING 1

**a. Methode 1 : Oude manier**

**(1)** $sin(x+\pi) = -1$

**(2)** $sin(x+\pi) = sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

**(3)** $x+\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad v \quad x+\pi = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad v \quad x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (zelfde)

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

**Methode 2 : Met nieuwe regels**

**(1)** $sin(x+\pi) = -1$

$-sin(x) = -1$

$sin(x) = 1$

**(2)** $sin(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

**(3)** $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad v \quad x = \pi - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ (zelfde)

$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

**b.** $sin(x) - cos^2(x) = -1$

$sin(x) - (1 - sin^2(x)) = -1$

$sin(x) - 1 + sin^2(x)) = -1$

$sin(x) + sin^2(x) = 0$

$sin(x)[1 + sin(x)] = 0$

$sin(x) = 0 \quad v \quad 1 + sin(x) = 0$

**(1)** $sin(x) = 0 \quad v \quad sin(x) = -1$

**(2)** $sin(x) = \sin(0) \quad v \quad sin(x) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

**(3)** $x = 0 + k \cdot 2\pi \quad v \quad x = \pi - 0 + k \cdot 2\pi \quad v$

$x = 1\frac{1}{2}\pi - 0 + k \cdot 2\pi \quad v \quad x = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = 0 + k \cdot 2\pi \quad v \quad x = \pi + k \cdot 2\pi \quad v$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad v \quad x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

## LES 2 VERDUBBELINGSFORMULES EN SOMFORMULES

### DEFINITIE VERDUBBELINGSFORMULES

**(1)** $sin(2x) = 2\,sin(x)\,cos(x)$

**(2)** $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

**(3)** $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$

**(4)** $cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$

Voor het bewijzen van lijn- en puntsymmetrie gebruiken we de formules

### DEFINITIE SOM- EN VERSCHILFORMULES

**(5)** $cos(t+u) = cos(t)cos(u) - sin(t)sin(u)$

**(6)** $cos(t-u) = cos(t)cos(u) + sin(t)sin(u)$

**(7)** $sin(t+u) = sin(t)cos(u) + sin(u)cos(t)$

**(8)** $sin(t-u) = sin(t)cos(u) - sin(u)cos(t)$

### VOORBEELD 1

**a.** Herleid $sin(2x)\,cos(x)$ tot $2sin(x) - 2sin^3(x)$

**b.** Herleid $cos(3x)$ tot $cos(x) - 4sin^2(x)cos(x)$

### OPLOSSING 1

**a.** $sin(2x)cos(x)$

$$= 2sin(x)cos(x) \cdot cos(x)$$
$$= 2sin(x) \cdot cos^2(x)$$
$$= 2sin(x) \cdot [\,1 - sin^2(x)\,]$$
$$= 2sin(x) - 2sin^3(x)$$

**b.** $cos(3x) = cos(x+2x)$

$$= cos(x)cos(2x) - sin(x)sin(2x)$$
$$= cos(x)\,[1 - 2sin^2(x)] - sin(x) \cdot 2sin(x)cos(x)$$
$$= cos(x) - 2\,sin^2(x)cos(x) - 2sin^2(x)cos(x)$$
$$= cos(x) - 4\,sin^2(x)cos(x)$$

## LES 3 LIJN- EN PUNTSYMMETRIE

### DEFINITIE LIJN- EN PUNTSYMMETRIE

- Lijnsymmetrisch = { Trek een lijn waarbij linkerkant en rechterkant gespiegeld zijn}
- Lijnsymmetrisch in $x = a$ $\rightarrow f(a-p) = f(a+p)$

  $VB: \ y = x^2$

- Puntsymmetrisch = {Draaiing van de grafiek rond het symmetriepunt 180 graden}
- Puntsymmetrisch in $(a, b)$ $\rightarrow f(a-p) + f(a+p) = 2b$

  $VB: \ y = x^3$

### VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $y = sin(x)$.

**a.** Toon aan dat de formule lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.

**b.** Toon aan dat de formule $f(x) = sin(x) + 3$ puntsymmetrisch in $(2\pi, 3)$.

**OPLOSSING 1**

**a.** Gebruik de somformules :

(1) $sin(x + ½\,\pi) \quad = sin(x)cos(\frac{1}{2}\pi) + sin(\frac{1}{2}\pi)cos(x)$

$= sin(x) \cdot 0 + 1 \cdot cos(x)$

$= cos(x)$

(2) $cos(x + ½\,\pi) \quad = sin(x)cos(\frac{1}{2}\pi) - sin(\frac{1}{2}\pi)cos(x)$

$= sin(x) \cdot 0 - 1 \cdot cos(x)$

$= cos(x)$

(3) Aangezien deze gelijk zijn is $y = sin(x)$ lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.

**b.** Gebruik de somformules :

(1) $f(2\pi - p) = sin(2\pi - p) + 3 \quad = sin(2\pi)cos(p) - sin(p)cos(2\pi) + 3$

$= 0 \cdot cos(p) - sin(p) \cdot 1 + 3$

$= -sin(p) + 3$

(2) $f(2\pi + p) = sin(2\pi + p) + 3 = sin(2\pi)cos(p) + sin(p)cos(2\pi) + 3$

$= 0 \cdot cos(p) + sin(p) \cdot 1 + 3$

$= sin(p) + 3$

(3) $f(2\pi - p) + f(2\pi + p) = (-sin(p) + 3) + (sin(p) + 3) = 6 = 2 \cdot 3$

Aangezien deze gelijk is aan 2b is de formule puntsymmetrisch in $(2\pi, 3)$.

## PARAGRAAF 11.2 : GONIO FUNCTIES DIFFERENTIËREN

### DIFFERENTIËERREGELS GONIOFORMULES

Er zijn maar 2 regels :

**(1)** $g(x) = sin(x) \quad \rightarrow g'(x) = cos(x)$

**(2)** $g(x) = cos(x) \quad \rightarrow g'(x) = -sin(x)$

Denk bij het differentiëren aan de productregel en kettingregel !!!

### VOORBEELD 1

Differentieer

**a.** $f(x) = 2cos(x) + 1$

**b.** $f(x) = cos(3x)$

**c.** $f(x) = x\,sin(x)$

**d.** $f(x) = 3x^2\,cos(x)$

**e.** $f(x) = sin^3(x)$

### OPLOSSING 1

Met productregel en kettingregel.

**a.** $f'(x) = 2\,sin(x)$

**b.** $f'(x) = -3\,sin(3x)$

**c.** $f'(x) = 1 \cdot sin(x) + x\,cos(x) = sin(x) + x\,cos(x)$

**d.** $f'(x) = 3x^2 \cdot -sin(x) + 6x \cdot cos(x) = -3x^2 sin(x) + 6xcos(x)$

**e.** $f(x) = sin^3(x) = (sin(x))^3$

$f'(x) = 3 \cdot \left(sin(x)\right)^2 \cdot cos(x) = 3sin^2(x)cos(x)$

## PARAGRAAF 11.3 : GONIO FUNCTIES PRIMITIVEREN

### DEFINITIE INTEGREREN

- $f(x) = \cos(x)$ → $F(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \sin(x)$ → $F(x) = -\cos(x)$
- Denk ook aan de kettingregel bij primitiveren : $F(x) = F(u) \cdot U$ met $U = 1 / u'$.

### VOORBEELD 1

Integreer

**a.** $f(x) = \cos(5x) + 10$

**b.** $f(x) = 2 \sin(3x + \tfrac{1}{2}\pi)$

**c.** $f(x) = \cos^2(x)$

### OPLOSSING 1

**a.** $u = 5x$ → $u' = 5$ → $U = 1/5$ → $F(x) = 1/5 \sin(5x)$

**b.** $u = 3x + \tfrac{1}{2}\pi$ → $u' = 3$ → $U = 1/3$ → $F(x) = -2/3 \cos(3x + \tfrac{1}{2}\pi)$

**c.** $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

$2\cos^2(x) = \cos(2x) + 1$

$\cos^2(x) = \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{2}$

Dus $f(x) = \cos^2(x) = \tfrac{1}{2}\cos(2x) + \tfrac{1}{2}$ → $F(x) = \tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{1}{2}x$