

PARAGRAAF 11.1 : GONIOMETRISCHE FORMULES

OMSCHRIJFREGELS VOOR SIN(X) EN COS(X)

Er zijn een aantal omschrijfregels die je soms nodig hebt om goniovergelijkingen op te lossen:

(1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

(2) $-\sin(x) = \sin(x + \pi)$

(3) $-\cos(x) = \cos(x + \pi)$

(4) $\sin(x) = \cos(x - \frac{1}{2}\pi)$ { $\frac{1}{2}\pi$ naar rechts }

(5) $\cos(x) = \sin(x + \frac{1}{2}\pi)$ { $\frac{1}{2}\pi$ naar links }

(6) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

REGELS OPlossen GONIO-VERGELIJKING

(1) DE STANDAARTABEL

rad	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Als de waarde negatief is, tel je er π bij op. Dus bijv. $\sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$

(2) DE GONIO VERGELIJKINGS REGELS :

$$\sin(A) = \sin(B)$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = \pi - B + k \cdot 2\pi$$

$$\cos(A) = \cos(B)$$

$$A = B + k \cdot 2\pi \vee A = -B + k \cdot 2\pi$$

(3) HET STAPPENPLAN

STAPPENPLAN GONIO-VERGELIJKING OPlossen

(1) Zorg dat er links geen getal voor de sin of cos staat

(2) Zet de rechtse waarde om in een sin/cos-waarde m.b.v. de standaardtabel

(3) Gebruik bovenstaande regel om de vergelijking verder op te lossen

(4) Schrijf alle oplossingen op die binnen het domein liggen

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $\sin(x + \pi) = -1$

b. $\sin(x) - \cos^2(x) = -1$

OPLOSSING 1**a. Methode 1 : Oude manier**

(1) $\sin(x + \pi) = -1$

(2) $\sin(x + \pi) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x + \pi = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x + \pi = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad (\text{zelfde})$$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

Methode 2 : Met nieuwe regels

(1) $\sin(x + \pi) = -1$

$$-\sin(x) = -1$$

$$\sin(x) = 1$$

(2) $\sin(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \quad (\text{zelfde})$

$$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

b. $\sin(x) - \cos^2(x) = -1$

$$\sin(x) - (1 - \sin^2(x)) = -1$$

$$\sin(x) - 1 + \sin^2(x) = -1$$

$$\sin(x) + \sin^2(x) = 0$$

$$\sin(x)[1 + \sin(x)] = 0$$

$$\sin(x) = 0 \vee 1 + \sin(x) = 0$$

(1) $\sin(x) = 0 \vee \sin(x) = -1$

(2) $\sin(x) = \sin(0) \vee \sin(x) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - 0 + k \cdot 2\pi \vee$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi - 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

$$x = 0 + k \cdot 2\pi \vee x = \pi + k \cdot 2\pi \vee$$

$$x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$$

LES 2 VERDUBBELINGSFORMULES EN SOMFORMULES**DEFINITIE VERDUBBELINGSFORMULES**

(1) $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$

(2) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

(3) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

(4) $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$

DEFINITIE SOM- EN VERSCHILFORMULES

(5) $\cos(t + u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$

(6) $\cos(t - u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$

(7) $\sin(t + u) = \sin(t)\cos(u) + \sin(u)\cos(t)$

(8) $\sin(t - u) = \sin(t)\cos(u) - \sin(u)\cos(t)$

VOORBEELD 1

a. Herleid $\sin(2x) \cos(x)$ tot $2\sin(x) - 2\sin^3(x)$

b. Herleid $\cos(3x)$ tot $\cos(x) - 4\sin^2(x)\cos(x)$

OPLOSSING 1

$$\begin{aligned}
 \text{a. } \sin(2x)\cos(x) &= 2\sin(x)\cos(x) \cdot \cos(x) \\
 &= 2\sin(x) \cdot \cos^2(x) \\
 &= 2\sin(x) \cdot [1 - \sin^2(x)] \\
 &= 2\sin(x) - 2\sin^3(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } \cos(3x) = \cos(x + 2x) &= \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\
 &= \cos(x) [1 - 2\sin^2(x)] - \sin(x) \cdot 2\sin(x)\cos(x) \\
 &= \cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\
 &= \cos(x) - 4\sin^2(x)\cos(x)
 \end{aligned}$$

LES 3 LIJN- EN PUNTSYMMETRIE**DEFINITIE LIJN- EN PUNTSYMMETRIE**

- Lijnsymmetrisch = {Trek een lijn waarbij linkerkant en rechterkant gespiegeld zijn}
- Lijnsymmetrisch in $x = a$ $\rightarrow f(a - p) = f(a + p)$
 $VB : y = x^2$
- Puntsymmetrisch = {Draaiing van de grafiek rond het symmetriepunt 180 graden}
- Puntsymmetrisch in (a, b) $\rightarrow f(a - p) + f(a + p) = 2b$
 $VB : y = x^3$

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $y = \sin(x)$.

- Toon aan dat de formule lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.
- Toon aan dat de formule $f(x) = \sin(x) + 3$ puntsymmetrisch in $(2\pi, 3)$.

OPLOSSING 1

a. Gebruik de somformules :

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad \sin(x + \frac{1}{2}\pi) &= \sin(x)\cos(\frac{1}{2}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(x) \\ &= \sin(x) \cdot 0 + 1 \cdot \cos(x) \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad \cos(x + \frac{1}{2}\pi) &= \sin(x)\cos(\frac{1}{2}\pi) - \sin(\frac{1}{2}\pi)\cos(x) \\ &= \sin(x) \cdot 0 - 1 \cdot \cos(x) \\ &= -\cos(x) \end{aligned}$$

(3) Aangezien deze gelijk zijn is $y = \sin(x)$ lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.

b. Gebruik de somformules :

$$\begin{aligned} \text{(1)} \quad f(2\pi - p) = \sin(2\pi - p) + 3 &= \sin(2\pi)\cos(p) - \sin(p)\cos(2\pi) + 3 \\ &= 0 \cdot \cos(p) - \sin(p) \cdot 1 + 3 \\ &= -\sin(p) + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad f(2\pi + p) = \sin(2\pi + p) + 3 &= \sin(2\pi)\cos(p) + \sin(p)\cos(2\pi) + 3 \\ &= 0 \cdot \cos(p) + \sin(p) \cdot 1 + 3 \\ &= \sin(p) + 3 \end{aligned}$$

$$\text{(3)} \quad f(2\pi - p) + f(2\pi + p) = (-\sin(p) + 3) + (\sin(p) + 3) = 6 = 2 \cdot 3$$

Aangezien deze gelijk is aan 2b is de formule puntsymmetrisch in $(2\pi, 3)$.

PARAGRAAF 11.2 : GONIO FUNCTIES DIFFERENTIËREN

DIFFERENTIËERREGELS GONIOFORMULES

Er zijn maar 2 regels :

$$(1) \quad g(x) = \sin(x) \quad \rightarrow g'(x) = \cos(x)$$

$$(2) \quad g(x) = \cos(x) \quad \rightarrow g'(x) = -\sin(x)$$

Denk bij het differentiëren aan de productregel en kettingregel !!!

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 2\cos(x) + 1$

b. $f(x) = \cos(3x)$

c. $f(x) = x \sin(x)$

d. $f(x) = 3x^2 \cos(x)$

e. $f(x) = \sin^3(x)$

OPLOSSING 1

Met productregel en kettingregel.

a. $f'(x) = 2 \sin(x)$

b. $f'(x) = -3 \sin(3x)$

c. $f'(x) = 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x) = \sin(x) + x \cos(x)$

d. $f'(x) = 3x^2 \cdot -\sin(x) + 6x \cdot \cos(x) = -3x^2 \sin(x) + 6x \cos(x)$

e. $f(x) = \sin^3(x) = (\sin(x))^3$

$$f'(x) = 3 \cdot (\sin(x))^2 \cdot \cos(x) = 3\sin^2(x)\cos(x)$$

PARAGRAAF 11.3 : GONIO FUNCTIES PRIMITIVEREN

DEFINITIE INTEGREREN

- $f(x) = \cos(x) \quad \rightarrow F(x) = \sin(x)$
- $f(x) = \sin(x) \quad \rightarrow F(x) = -\cos(x)$
- Denk ook aan de kettingregel bij primitiveren : $F(x) = F(u) \cdot U$ met $U = 1 / u'$.

VOORBEELD 1

Integreer

- $f(x) = \cos(5x) + 10$
- $f(x) = 2 \sin(3x + \frac{1}{2} \pi)$
- $f(x) = \cos^2(x)$

OPLOSSING 1

- $u = 5x \quad \rightarrow u' = 5 \rightarrow U = 1/5 \quad \rightarrow F(x) = 1/5 \sin(5x)$
- $u = 3x + \frac{1}{2}\pi \quad \rightarrow u' = 3 \rightarrow U = 1/3 \quad \rightarrow F(x) = -2/3 \cos(3x + \frac{1}{2} \pi)$
- $$\begin{aligned} \cos(2x) &= 2 \cos^2(x) - 1 \\ 2 \cos^2(x) &= \cos(2x) + 1 \\ \cos^2(x) &= \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Dus } f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \quad \rightarrow F(x) = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2}x$$