PARAGRAAF 5.1 : DE PRODUCTREGEL

LES 1 : KANSEN

HERHALEN KANSEN BEREKENEN

Hoe bereken je een kans. Dat kan op twee manieren :

(1) $Kans = \frac{Gunstige\ uitkomsten}{Totaal\ aantal\ uitkomsten}$ (kans op één experiment)

(2) P(…) = kans op één rijtje x het aantal rijtjes (meerdere experimenten)

VOORBEELD 1

Er zijn drie vazen. In iedere vaas zitten 2 blauwe, 5 groene en 3 rode knikkers. Guus pakt uit iedere vaas 1 knikker. Bereken de kans dat:

a. Hij 3 rode knikkers pakt.

b. Hij 2 groene en een blauwe knikker pakt.

OPLOSSING 1

We zullen bij beide vragen beide oplossingen laten zien :

a. $P(RRR) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{27}{1000} = 0{,}027$

b. $P(GGB) + P(GBG) + P(BGG) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} + \frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{150}{1000} = 0{,}150$

of

$P(GGB) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \binom{3}{1} = 0{,}150$

VOORBEELD 2

Wim gooit met twee gewone dobbelstenen en één viervlaksdobbelsteen. Bereken de kans dat :

a. Ze als som 15 gooien.

b. Er precies één 5 gegooid wordt.

c. Met elke dobbelsteen minimaal 4 ogen gegooid wordt.

OPLOSSING 1

Het laatste getal is hier de viervlaksdobbelsteen

a. Som = 15 → 663 of 654 of 564

$$P(663) + P(654) + P(564) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}$$

$$P(663) + P(654) + P(564) = \frac{1}{144} + \frac{1}{144} + \frac{1}{144} = \frac{3}{144}$$

b. Eén 5 → 5 ~~5 5~~ of ~~5~~ 5 ~~5~~ (~~55~~5 kan niet want het is een viervlaks !!)

$$P(5\,\cancel{5}\,\cancel{5}) + P(\cancel{5}\,5\,\cancel{5}) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{4}$$

$$P(5\,\cancel{5}\,\cancel{5}) + P(\cancel{5}\,5\,\cancel{5}) = \frac{20}{144} + \frac{20}{144} = \frac{40}{144} \left(= \frac{5}{18}\right)$$

c. Noem 4 of hoger even H (Hoog) en

Met elke dobbelsteen H → HHH

$$P(HHH) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{144} \left(= \frac{1}{16}\right)$$

PARAGRAAF 5.2 : HERHALEN VAN KANSEXPERIMENTEN

HERHALING

Hoe bereken je de kans als je een aantal keren achter elkaar een experiment doet ?

P(...) = kans op één rijtje x het aantal verschillende rijtjes

VOORBEELD 1

Jan maakt een ABCD proefwerk. Hij gokt 5 vragen. Bereken de kans dat :

a. Hij geen enkele vraag goed gokt.

b. Hij precies 3 vragen goed gokt.

c. Hij minstens 4 vragen goed gokt.

d. Hij minstens 1 vraag goed gokt.

OPLOSSING 1

a. $P(FFFFF) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}2373$

b. $P(GGGFF) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{3} = 0{,}0879$

c. Minstens 4 vragen goed → 4 goed of 5 goed

$P(GGGGF) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \binom{5}{4} = 0{,}014648$

$P(GGGGG) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0{,}000977$

$P(GGGGF) + P(GGGGG) = 0{,}014648 + 0{,}00977 = 0{,}0156$

d. Minstens 1 vraag goed → 1 of 2 of 3 of 4 of 5 goed

→ 1 – P(0 goed)

$$P(minstens\ 1\ goed) = 1 - P(geen\ goed)$$
$$= 1 - P(FFFFF) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 1 - 0{,}2373 = 0{,}7627$$

VOORBEELD 2

In een vaas zitten 3 blauwe, 5 groene en 7 rode knikkers. Harrie pakt 3 knikkers. (Hij legt ze niet terug). Bereken de kans dat :

a. Hij 2 groene en een blauwe pakt.

b. Hij precies 1 rode pakt

c. Hij precies 2 blauwe pakt.

Hans pakt ook een knikker uit de vaas. Hij stopt als hij een rode knikker pakt.

d. Bereken de kans dat hij 4 keer een knikker pakt.

Frans pakt ook een knikker uit de vaas. Hij stopt als hij twee rode knikkers heeft.

e. Bereken de kans dat hij 4 keer een knikker pakt.

OPLOSSING 2

a. P(GGB) = $\binom{3}{1} \times \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{3}{13} = 0{,}0659$

b. P(R $\cancel{R}$ $\cancel{R}$) = $\binom{3}{1} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} = 0{,}4308$

c. P(B B $\cancel{B}$) = $\binom{3}{1} \times \frac{3}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{11}{13} = 0{,}0791$

d. P($\cancel{R}$ $\cancel{R}$ $\cancel{R}$ $\underline{R}$) = $\binom{3}{0} \times \frac{8}{15} \times \frac{7}{14} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{12} = 0{,}0718$

e. P(R $\cancel{R}$ $\cancel{R}$ $\underline{R}$) = $\binom{3}{1} \times \frac{7}{15} \times \frac{8}{14} \times \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} = 0{,}1846$

PARAGRAAF 5.3 TREKKEN MET OF ZONDER TERUGLEGGEN

LES 1 : VASTE OF WISSELENDE KANS (MET OF ZONDER TERUGLEGGEN)

Er zijn twee soorten kansen :

(1) Vaste kans (met terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1e rode ≠ kans op 2e rode.
- Gebruik je als er vaste kans of percentage wordt gegeven. (=binomiale verdeling)
- $P(X = k) = \text{kans op één rijtje} \times \text{het aantal rijtjes}$

(2) Wisselende kans (zonder terugleggen)

Wanneer

- Gebruik je als de kans op 1e rode ≠ kans op 2e rode.
- $P(X = k) = \text{kans op één rijtje} \times \text{het aantal rijtjes}$

VOORBEELD 1

Op de olympische spelen wint 1 op de 5 Amerikanen een medaille. Je komt na de olympische spelen in een café 6 Amerikaanse olympische sporters tegen. Bereken de kans dat :

a. Precies 3 Amerikanen een medaille gewonnen hebben.

b. Hoogstens 5 Amerikanen een medaille hebben gewonnen.

Aan de olympische finale zwemmen doen 3 Amerikanen, 2 Duitsers en 3 Nederlanders mee. Bereken de kans dat de 3 medailles gewonnen worden door :

c. Precies 2 Nederlanders

d. Minstens 1 Amerikaan.

OPLOSSING 1

a. Vaste kans want P(1^e A) = P(2^e A) = 0,10.

$P(AAANNN) = (\frac{1}{5})^3 \cdot (\frac{4}{5})^3 \cdot \binom{6}{3} = 0{,}0819$

b. $P(hoogstens\ 5\ A) = 1 - P(6\ A) = 1 - P(AAAAAA)$

$= 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^6 = 1 - 0{,}9999 = 0{,}0001$

c. Wisselend, want P(1^e Ne) ≠ P(2^e Ne)

$P(NN\cancel{N}) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \binom{3}{2} = 0{,}2679$

d. $P(minstens\ 1\ A) = 1 - P(geen\ A) = 1 - P(\cancel{AAA}) = 1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = 0{,}8214$

PARAGRAAF 5.5 : DE BINOMIALE VERDELING

LES 1 : BINOMPDF EN BINOMCDF

DEFINITIES BINOMIALE VERDELING

- Binomiale verdeling = { Een kansverdeling waar maar twee keuzes zijn }
  { Een wel-niet experiment }
- Binomiale verdeling gaat ALTIJD over VASTE kans / MET terugleggen.

BINOMIALE VERDELING OP DE GR

- Binomknop bij : distr (2nd Vars) > binompdf/cdf

- n = { Het aantal experimenten }
- p = { de kans op succes }
- k = { het aantal keren succes }

- $P(X = k)$ = binompdf(n,p,k) { p = precies }
- $P(X \leq k)$ = binomcdf(n,p,k) { c = cumulatief }

VOORBEELD 1

Suzy maakt een vierkeuzeproefwerk met 10 vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Bereken de kans dat :

a. Zij vier vragen goed gokt.

b. Zij hoogstens 3 vragen goed gokt.

c. Zij meer dan 5 vragen goed gokt.

d. Zij tussen de 3 en de 7 scoort.

Trudy weet 3 vragen zeker en gokt de rest.

e. Zij 6 punten haalt.

f. Zij minstens een 7 haalt.

OPLOSSING 1

Definieer eerst de toevalsvariabele. Dat maakt het opschrijven een stuk makkelijker.

X = {aantal vragen goed gegokt}

a. $P(X = 4) = P(ggggffffff) = 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^6 \cdot \binom{10}{4} = 0{,}1460$

Dit kun je ook uitrekenen met de knop binompdf :
n = { Het aantal experimenten } = 10
p = { de kans op succes } = 0,25
k = { het aantal keren succes } = 4

$P(X = 4) = binompdf(10{,}0.25{,}4) = 0{,}1460$

b. $P(X \leq 3) = binomcdf(10{,}0.25{,}3) = 0{,}7759$

c. $P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf(10{,}0.25{,}5) = 0{,}0197$

d. $P(3 < X < 7) = P(4 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 3) =$
$binomcdf(10{,}0.25{,}6) - binomcdf(10{,}0.25{,}3) = 0{,}9965 - 0{,}7759 = 0{,}2206$

e. Nu is n = 7 en p = 0,25 (je weet drie vragen zeker dus die gok je niet). Voor een 6 moet ze drie vragen goed gokken :
$P(X = 3) = binompdf(7{,}0.25{,}3) = 0{,}1730$

f. Voor een 7 moet ze minstens 4 vragen goed gokken
$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - binomcdf(7{,}0.25{,}3) = 0{,}9294$

LES 2 VOOR WELKE N MET BINOMPDF/CDF

VOORBEELD 1

Vincent maakt een driekeuzeproefwerk met n vragen. Iedere vraag is één punt waard. Ze gokt alle vragen. Uit hoeveel vragen moet het proefwerk bestaan als

a. de kans dat zij 6 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,90.

b. de kans dat zij 8 of meer vragen goed heeft groter is dan 0,97.

OPLOSSING 1

a. X = {aantal vragen goed gegokt} met N=n en p=$^1/_3$.

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - binomcdf\left(n, \frac{1}{3}, 5\right) > 0{,}90$$

GR : $Y_1 = 1 - binomcdf\left(X, \frac{1}{3}, 5\right)$

X	Y_1	
25	0,8881	te klein
26	0,9097	groot genoeg

Dus voor n ≥ 26

b. X = {aantal vragen goed gegokt} met N=n en p=$^1/_3$.

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - binomcdf\left(n, \frac{1}{3}, 7\right) > 0{,}97$$

GR : $Y_1 = 1 - binomcdf\left(X, \frac{1}{3}, 7\right)$

X	Y1	
38	0,9668	te klein
39	0,9735	groot genoeg

Dus voor n ≥ 39