

## PARAGRAAF 6.1 : VECTOREN EN LIJNEN

## LES 1 : VECTOREN

## DEFINITIES

- Vector  $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  wil zeggen a naar rechts en b omhoog.

## VOORBEELD 1

Neem de vectoren  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

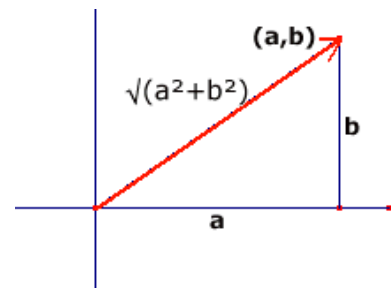
- Bereken en teken de lengte van  $v$ .
- Teken en bereken  $v + w$  en  $v + 2w$
- Teken en bereken  $v - w$ .

## OPLOSSING 1

- Lengte van vector  $x \rightarrow |x| = \sqrt{a^2 + b^2} =$

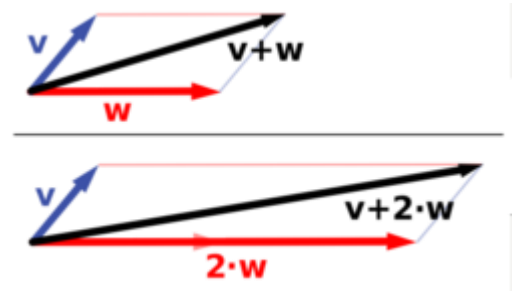
(i) Teken en geeft

(ii)  $x = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$



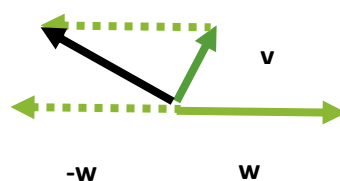
- (i) Teken en geeft

(ii)  $v + w = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  en  $v + 2w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$



- (i) Teken en geeft

(ii)  $v - w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



**DEFINITIES BIJ EEN VECTORVOORSTELLING:**

- Vectorvoorstelling = { vergelijking van de lijn uitgedrukt in vectoren }
- $r$  = richtingsvector
- Vectorvoorstelling = steunvector +  $\alpha \cdot$  richtingsvector
- Vectorvoorstelling =  $A + \alpha \cdot (B - A)$

**VOORBEELD 2**

Neem de punten  $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  en  $W = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Stel een vectorvoorstelling op van de lijn  $l$  door  $V$  en  $W$ .
- Bepaal het snijpunt van lijn  $l$  met de  $y$ -as.

**OPLOSSING 2**

a. Steunvector =  $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Richtingsvector} = V - W = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vectorvoorstelling: } l = W + \alpha (V - W) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix}$$

b. Snijpunt  $y$ -as, dan is de  $x = 0$   $\rightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2\alpha \\ 1 - 3\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \end{pmatrix}$

$$3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1,5 \quad \rightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot 1\frac{1}{2} \\ 1 - 3 \cdot 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## PARAGRAAF 6.2 : VECTOREN EN HOEKEN

## LES 1 : INPRODUCT EN HOEKEN

## DEFINITIES

Het **inproduct** van de vectoren  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  is gedefinieerd als

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

De **hoek  $\alpha$**  tussen twee vectoren  $a$  en  $b$  is gedefinieerd als

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} \text{ met } 0 \leq \alpha \leq 90$$

## VOORBEELD 1

Gegeven zijn de vectoren  $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Bereken het inproduct van  $a$  en  $b$ .
- Bereken de hoek tussen de vectoren  $a$  en  $b$ . Maak eerst een schets.

Gegeven zijn ook de lijnen  $l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $l_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Bereken de hoek tussen de lijnen  $l_1$  en  $l_2$ .

## OPLOSSING 1

a.  $a \cdot b = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 17$

b.  $|a| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$  en  $|b| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{17}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = 0,9246 \dots$$

$$\alpha = 22$$

- c. De hoek tussen de twee lijnen wordt bepaald door de richtingsvectoren !!!

$$r_1 \cdot r_2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot -3 = -1$$

$$|r_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ en } |r_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}} = -0,196 \dots$$

$$\alpha = 101$$

Omdat  $\alpha > 90$  geldt dat de hoek  $= 180 - \alpha = 180 - 101 = 79$

**LES 2 : LOODRECHT****DEFINITIES**

(1) Als twee vectoren loodrecht op elkaar staan, dan is het inproduct nul

(2) Dit kun je zien aan de formule voor de hoek :

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot n}{|a||n|} = \frac{0}{|a||n|} = 0 \rightarrow \alpha = 90$$

(3) Normaalvector ( $n$ ) = { een vector die loodrecht staat op een andere vector }

**DE NORMAALVECTOR**

(1) De normaalvector  $n_v$  staat loodrecht op de richtingsvector  $r_v$

(2) Truc bepalen normaalvector van  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow n_v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  of  $n = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

(3) Als de normaalvector  $n_v = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  dan is de vergelijking van de lijn  $-bx + ay = c$

**VOORBEELD 1**

Gegeven zijn de punten  $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Lijn k gaat door A en B.

- Bepaal de vectorvoorstelling van lijn k.
- Bepaal, met behulp van de rc, de vergelijking van lijn k in de vorm  $ax + by = c$
- Bepaal de normaalvector van deze lijn k. Wat valt je op ?
- Bepaal de vergelijking van lijn k via de normaalvector om de lijn  $ax + by = c$  op te stellen.

Gegeven is ook lijn  $l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

- Bepaal de vergelijking van lijn  $l_2$ .
- Bepaal het snijpunt van deze twee lijnen

**OPLOSSING 1**

a.  $r = a - b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $s = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

lijn  $l_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \vartheta \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b.  $rc = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-2}{5-3} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + b$  en punt  $(5,1) \rightarrow 1 = -\frac{1}{2} \cdot 5 + b \rightarrow b = 3\frac{1}{2}$

Dus  $y = -\frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x + y = 3\frac{1}{2}$  oftewel  $x + 2y = 7$

c. Normaalvector staat loodrecht op de richtingsvector, dus  $n \cdot r = 0$

Dus  $n \cdot r = n_1 \cdot -2 + n_2 \cdot 1 = 0$

Dus  $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  (of een veelvoud daarvan)

d. (1)  $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  dus  $ax + by = c \rightarrow x + 2y = c$

(2) Punt  $(5,1) \rightarrow 5 + 2 \cdot 1 = c \rightarrow c = 7$

(3) Vergelijking  $\rightarrow x + 2y = 7$

e. (1)  $n = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow 3x + 2y = c$

(2) Punt  $(7,9) \rightarrow 3 \cdot 7 + 2 \cdot 9 = 39 \rightarrow c = 39$

(3) Vergelijking  $\rightarrow 3x + 2y = 39$

f.  $x = 7 + 2\mu$  en  $y = 9 - 3\mu$ . Deze kun je invullen in  $x + 2y = 7$ . Dit geeft :

$$7 + 2\mu + 2(9 - 3\mu) = 7$$

$$7 + 2\mu + 18 - 6\mu = 7$$

$$-4\mu = -18$$

$$\mu = 4\frac{1}{2}$$

Dit geeft  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} + 4\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -4\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \text{Snijpunt } S$

**OPMERKING**

Je kunt natuurlijk ook het stelsel  $2x - 3y = -13$  en  $3x + 2y = 39$  oplossen.

## PARAGRAAF 6.4 : VERGELIJKINGEN VAN VLAKKEN

## LES 1 : DE VECTORVOORSTELLING EN DE VERGELIJKING VAN EEN VLAK

Je kunt een vlak op twee manieren weergeven :

**(1)** Met een vectorvoorstelling.

- Een vlak bestaat uit één steunvector en twee richtingsvectoren
- Dus  $V = s + \alpha \cdot r_1 + \beta \cdot r_2$ .
- Voorbeeld  $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

**(2)** Met een vergelijking

Als je twee of drie snijpunten met de assen weet kun je gebruik maken van de assenvergelijking :

Neem  $P = (p,0,0)$ ,  $Q=(0,q,0)$  en  $R=(0,0,r)$ .

Dan geldt als **vergelijking voor vlak V** :  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$

Als je deze vergelijking vermenigvuldigt met  $pqr$  ontstaat er voor vlak V de vergelijking  $qrx + pry + pqz = pqr$ . Dit is mooier te schrijven als :

$ax + by + cz = d$  waarbij de **normaalvector**  $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$  van vlak V hoort.

**VOORBEELD 1**

Gegeven is vlak  $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- a. Bereken de snijpunten met de y-as.
- b. Ligt het punt (2,1,1) in het vlak.

Gegeven is een vlak door (3,0,0) en (0,5,0). Bepaal de vergelijking en de normaalvector als het vlak gaat :

- c. door (0,0,7).
- d. door (9, -5, -2). (Noem dit vlak W)
- e. Bepaal het snijpunt S van de lijn  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  met vlak W.

**OPLOSSING 1**

a.  $x = 0$  en  $z = 0$  geeft  $\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Hieruit volgt :

$$(i) \quad 3 - 2\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 1\frac{1}{2}$$

$$(ii) \quad 1 + 4\alpha + 3\beta = 0 \rightarrow 1 + 4 \cdot 1\frac{1}{2} + 3\beta = 0 \rightarrow 3\beta = -7 \rightarrow \beta = -\frac{7}{3}$$

$$(iii) \quad y = 0 + 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 2 \cdot -\frac{7}{3} = \frac{9}{3} - \frac{14}{3} = -\frac{5}{3}$$

b. Dan moet  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(i) \quad 3 - 2\alpha = 1 \rightarrow \alpha = 1$$

$$(ii) \quad 2\alpha + 2\beta = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 + 2\beta = 1 \rightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$(iii) \quad 1 + 4\alpha + 3\beta = 2 \rightarrow 1 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot -\frac{1}{2} = 1 + 4 - 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \neq 2 \rightarrow \text{Nee!}$$



c.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1$  ( $\times 3 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow \times 105$ )

$$35x + 21y + 15z = 105 \text{ met normaalvector } n = \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix}$$

d.  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{r} = 1$  en vul in punt  $(9, -5, -2)$ .

(i) Dit geeft  $\frac{9}{3} + \frac{-5}{5} + \frac{-2}{r} = 1 \rightarrow 3 - 1 - \frac{2}{r} = 1 \rightarrow -\frac{2}{r} = -1 \rightarrow r = 2$

(ii) Vlak W :  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{2} = 1$  ( $\times 3 \cdot 5 \cdot 2 = \times 30$ )  $\rightarrow 10x + 6y + 15z = 30$

met normaalvector  $n = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}$

e.  $x = 1 + \lambda$  en  $y = 2\lambda$  en  $z = 2 - 2\lambda$  invullen in W :  $10x + 6y + 15z = 30$ . Dit geeft

$$10(1 + \lambda) + 6(2\lambda) + 15(2 - 2\lambda) = 30$$

$$10 + 10\lambda + 12\lambda + 30 - 30\lambda = 30$$

$$-8\lambda = -10 \rightarrow \lambda = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$$

Dus  $x = 1 + 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$  en  $y = 2 \cdot 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$  en  $z = 2 - 2 \cdot 1\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$

Dus S =  $(2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

**LES 2 : DE VERGELIJKING VAN EEN VLAK MET UITPRODUCT****DEFINITIE UITPRODUCT**

Gegeven zijn twee vectoren  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  en  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

**(1)** Het **uitproduct** van de vectoren  $a$  en  $b$  is gedefinieerd als

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

**(2)** **Normaalvector van een vlak** = { het uitproduct van de twee richtingsvectoren }

**VOORBEELD 1**

Gegeven is vlak  $V : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Bepaal de vergelijking van vlak  $V$  in de vorm  $ax + by + cz = d$  (met  $a, b, c, d$  hele getallen)

**OPLOSSING 1**

$$(i) \quad r_1 \times r_2 = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - (-2) \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{normaalvector } V = n$$

$$(ii) \quad ax + by + cz = d \quad \rightarrow 4x - 6y + 2z = d$$

Punt (1,2,3) invullen  $\rightarrow 4 \cdot 1 - 6 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = d$

$$\rightarrow 4 - 12 + 6 = -2 = d$$

$$(iii) \quad \text{Dus } V \text{ is} \quad \rightarrow 4x - 6y + 2z = -2$$

**OPMERKING**

Om het uitproduct makkelijker uit te rekenen, kun je gebruik maken van het “Amsterdammertje” :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \\ \text{X} \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 - -2 \cdot 2 \\ -2 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## PARAGRAAF 6.5 : HOEKEN IN DE RUIMTE

## LES 1 : HOEK TUSSEN LIJN/LIJN EN LIJN/VLAK

## DEFINITIE HOEKEN

De **hoek** tussen **twee lijnen** = { de hoek tussen twee richtingsvectoren  $r_1$  en  $r_2$  } =

$$\cos \alpha = \frac{r_1 \cdot r_2}{|r_1||r_2|} \text{ met } 0 \leq \alpha \leq 90$$

De **hoek** tussen een **lijn**  $l$  met richtingsvector  $r_1$  en de **normaalvector**  $n$  van vlak  $V$  bereken je in twee stappen :

(1)  $\cos \beta = \frac{r_1 \cdot n}{|r_1||n|}$

(2) Dan is de **hoek tussen vlak  $V$  en lijn  $l$**  gelijk aan  $\angle(V, l) = 90 - \beta$ .

## VOORBEELD 1

Gegeven zijn vlak  $V : 4x - 6y + 2z = -2$  en lijn  $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bereken de hoek tussen vlak  $V$  en lijn  $l$ .

## OPLOSSING 1

(i) Gegeven  $r_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $n = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

(ii)  $r_1 = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$   
 $n = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$   
 $r_1 \cdot n = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-6) + 1 \cdot 2 = 20$

(iii)  $\cos \beta = \frac{r_1 \cdot n}{|r_1||n|} = \frac{20}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{56}} = 0,8058 \dots$   
 $\beta = 36^\circ$

(iv) Dan geldt  $\angle(V, l) = 90 - \beta = 90 - 36 = 54^\circ$

**LES 2 : HOEK TUSSEN VLAK/VLAK**

De **hoek** tussen **twee vlakken** = hoek tussen de twee **normaalvectoren**  $n_1$  en  $n_2$  is

$$\cos \alpha = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} \text{ met } 0 \leq \alpha \leq 90$$

**VOORBEELD 1**

Gegeven zijn vlak  $V : 4x - 6y + 2z = -2$  en vlak  $W : x + 2y + 3z = 10$

Bereken de hoek tussen vlak  $V$  en vlak  $W$ .

**OPLOSSING 1**

(i) Je weet dat  $n_V = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$  en  $n_W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) 
$$n_W = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$
$$n_V = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{56}$$
$$r_1 \cdot n = 1 \cdot 4 + 2 \cdot -6 + 3 \cdot 2 = -2$$

(iii) 
$$\cos \beta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}} = -0,0714 \dots$$
$$\beta = 94^\circ$$

(iv) Omdat  $94 > 90$  is  $\angle(V, W) = 180 - 94 = 86^\circ$

## PARAGRAAF 6.6 : AFSTANDEN EN VECTOREN

## LES 1 : AFSTANDEN PUNT/PUNT EN PUNT/LIJN

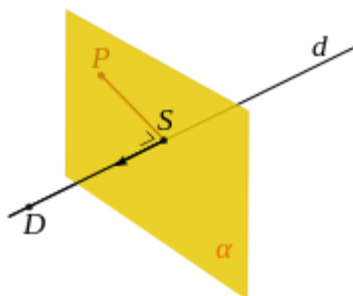
## DEFINITIES AFSTANDEN

- $d(P, Q) = \{ \text{De afstand tussen punt P en punt Q} \} = |PQ|$
- $d(l, ABC) = \{ \text{De afstand tussen lijn l en vlak ABC} \}$
- De **afstand** tussen **punt P en punt Q** is

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2}$$

Om de afstand tussen een punt en een lijn te bepalen is een stappenplan nodig :

## STAPPENPLAN PUNT / LIJN



## De afstand van een punt P tot lijn l :

- Maak een vlak V door P dat loodrecht staat op lijn l.
- De richtingsvector van lijn l is de normaalvector van V !! (  $r_l = n_v$  )
- Gebruik punt P om de d uit te rekenen.
- Bereken de coördinaten van het snijpunt van V en l. Noem dit punt Q.
- $d(P, l) = d(P, Q) = |PQ|$

**VOORBEELD 1**

Gegeven is lijn  $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  en de punten  $P = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$  en  $T = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

- a. Bereken afstand tussen punt P en punt T
- b. Bereken de afstand tussen punt P en lijn l.

**OPLOSSING 1**

- a. De afstand tussen punt P en punt Q is

$$d(P, T) = \sqrt{(11 - 4)^2 + (6 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{49 + 25 + 4} = \sqrt{78}$$

- b. We volgen het stappenplan :

- (i) Maak een vlak door P loodrecht op lijn l.

- (ii) De normaalvector  $n = r_l = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

- (iii) Vlak  $V : 5x + 2y - 2z = d$  en  $P = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Invullen van punt P geeft :  $5 \cdot 11 + 2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 65 = d$

Dus V is  $5x + 2y - 2z = 65$

- (iv)  $l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 5\alpha \\ 2\alpha \\ 3 - 2\alpha \end{pmatrix}$ . Vul dit in in de vergelijking van V :

$$5(1 + 5\alpha) + 2 \cdot 2\alpha - 2(3 - 2\alpha) = 65$$

$$5 + 25\alpha + 4\alpha - 6 + 4\alpha = 65$$

$$33\alpha = 66 \rightarrow \alpha = 2$$

$$\text{Dus } Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- (v) De afstand tussen punt P en punt Q is

$$d(P, l) = d(P, Q) = \sqrt{(11 - 11)^2 + (6 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{0 + 4 + 4} = \sqrt{8}$$

**LES 2 : AFSTANDEN TUSSEN PUNT EN VLAK**

Om de afstand tussen een punt en een vlak te bepalen is een stappenplan nodig :

**STAPPENPLAN AFSTAND VAN EEN PUNT P TOT VLAK V :**

- (i) Bepaal de vergelijking van een vlak V
- (ii) Bepaal de lijn k die loodrecht staat op het vlak door punt P
- (iii) Bereken de coördinaten van het snijpunt van n en V. Noem dit punt Q.
- (iv)  $D(P,V) = d(P,Q) = |PQ|$

**VOORBEELD 1**

Gegeven is een vlak V door  $(3,0,0)$  ;  $(0,5,0)$  en  $(0,0,7)$ .

Bepaal de afstand van dit vlak tot het punt  $(1, 5, 2)$ .

**OPLOSSING 1**

(i)  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = 1 \quad (\times 3 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow \times 105)$

$$35x + 21y + 15z = 105$$

(ii) Normaalvector  $n = \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = r_k$  (=richtingsvector van k)

$$\text{Dus } k : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 35\alpha \\ 5 + 21\alpha \\ 2 + 15\alpha \end{pmatrix}$$

(iii) Invullen van de coördinaten van lijn k in vlak V geeft :

$$35(1 + 35\alpha) + 21(5 + 21\alpha) + 15(2 + 15\alpha) = 105$$

$$35 + 1225\alpha + 110 + 441\alpha + 30 + 225\alpha = 105$$

$$1891\alpha + 175 = 105$$

$$1891\alpha = -70 \rightarrow \alpha = -\frac{70}{1891}$$

De coördinaat kun je dan berekenen met  $Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{70}{1891} \begin{pmatrix} 35 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{35}{1891} \\ \frac{7985}{1891} \\ \frac{2732}{1891} \end{pmatrix}$

(iv) Nu je punt Q weet kun je de afstand PQ berekenen.