

PARAGRAAF 9.1 : PRODUCTREGEL (PR) EN QUOTIËNTREGEL (QR)

LES 1 : PRODUCT EN QUOTIËNTREGEL

HULPREGELS DIFFERENTIËREN

Er zijn (voorlopig) twee hulpregels bij differentiëren :

(1) Productregel : $h = f \cdot g \rightarrow h' = f' \cdot g + f \cdot g'$

(2) Quotiëntregel : $f = \frac{t}{n} \rightarrow f' = \frac{n \cdot t' - t \cdot n'}{n^2} = \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2}$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $h(x) = x^2(3x + 5)$

b. $f(x) = \frac{3x-4}{-2x+9}$

OPLOSSING 1

a. $f = x^2 \rightarrow f' = 2x$
 $g = 3x + 5 \rightarrow g' = 3$

$$h'(x) = 2x(3x + 5) + x^2 \cdot 3 = 6x^2 + 10x + 3x^2 = 9x^2 + 10x$$

b. $t = 3x - 4 \rightarrow t' = 3$

$$n = -2x + 9 \rightarrow n' = -2$$

$$f'(x) = \frac{(-2x+9) \cdot 3 - (3x-4) \cdot (-2)}{(-2x+9)^2} = \frac{-6x+27-(-6x+8)}{(-2x+9)^2} = \frac{19}{(-2x+9)^2}$$

PARAGRAAF 9.2 : DE KETTINGREGEL

LES 1 : DE KETTINGREGEL

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = (x^2 - 4x)^7$

POGING 1 : HAAKJES WEGWERKEN

Je haalt de haakjes weg. Maar dat is niet te doen !!!

POGING 2 : DE KETTINGREGEL GEBRUIKEN

Deze functie bestaat eigenlijk uit twee delen :

$$\begin{array}{ccccccc} x & \rightarrow & x^2 - 4x & \rightarrow & (x^2 - 4x)^7 & & \text{(Stel } u = x^2 - 4x) \\ & & u & \rightarrow & u^7 & & \end{array}$$

THEORIE KETTINGREGEL

Kettingregel : $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

OPLOSSING 1A : MET U

(1) Neem $u = x^2 - 4x \rightarrow u' = 2x - 4$

Dan is $f(u) = u^7 \rightarrow f'(u) = 7u^6$

(2) $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x) = 7u^6 \cdot (2x - 4) = 7(x^2 - 4x)^6 \cdot (2x - 4)$

OPLOSSING 1B : SNELLE MANIER

$$f'(x) = 7(x^2 - 4x)^6 \cdot (2x - 4)$$


× afgeleide

VOORBEELD 2

Differentieer

a. $f(x) = \sqrt{5x + 2}$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10 - 4x}$

OPLOSSING 2

We lossen dit op, op de snelle manier.

a. $f(x) = \sqrt{5x + 2} = (5x + 2)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5x + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 5 = 2\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{(5x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\frac{1}{2}}{\sqrt{5x+2}}$$

b. $g(x) = 3x + 7 - \sqrt{10 - 4x} = 3x + 7 - (10 - 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$g'(x) = 3 - \frac{1}{2}(10 - 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -4 = 3 + 2 \frac{1}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{(10-4x)^{\frac{1}{2}}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{10-4x}}$$

OPMERKING KETTINGREGEL

De uitleg van de kettingregel is als volgt :

- Je kunt de afgeleide ook schrijven als $f'(x) = \frac{df}{dx}$

- Dit geeft :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dx} \times \frac{du}{du} = \frac{df \cdot du}{dx \cdot du} = \frac{df \cdot du}{du \cdot dx} = \frac{df}{du} \times \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u'(x)$$

- Dus $f'(x) = f'(u) \cdot u'(x)$

LES 2 : DE KETTINGREGEL MET DE PRODUCTREGEL (PR) OF QUOTIËNTREGEL (QR)**VOLGORDE HULPREGELS DIFFERENTIËREN**

Soms krijg je meerdere regels gecombineerd. Er geldt dan de volgende regel

- (1) Eerst PR of QR toepassen
- (2) Dan pas de kettingregel toepassen (kan ook binnen de QR of PR nodig zijn).

VOORBEELD 1

Differentieer de functie $f(x) = 9x(x^2 - 6x)^5$

OPLOSSING 1

- (1) Eerst de losse delen differentiëren van de productregel :

$$\begin{array}{ll} g = 9x & \rightarrow g' = 9 \\ h = (x^2 - 6x)^5 & \rightarrow h' = 5(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6) \end{array}$$


× afgeleide

- (2) Nu de productregel invullen :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9 \cdot (x^2 - 6x)^5 + 9x \cdot 5(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6) \\ f'(x) &= 9(x^2 - 6x)^5 + 45x(x^2 - 6x)^4 \cdot (2x - 6) \end{aligned}$$

VOORBEELD 2

Differentieer de functie $f(x) = 3x\sqrt{6-2x}$

Toon aan dat deze te schrijven is als $f'(x) = \frac{18-9x}{\sqrt{6-2x}}$.

OPLOSSING 2

(1) Eerst de losse delen differentiëren van de productregel :

$$g = 3x$$

$$\rightarrow g' = 3$$

$$h = \sqrt{6-2x} = (6-2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow h' = \frac{1}{2}(6-2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot -2 = -1 \cdot \frac{1}{(6-2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}$$

(2) Nu de productregel invullen

$$f'(x) = 3x \cdot \frac{-1}{\sqrt{6-2x}} + 3 \cdot \sqrt{6-2x}$$

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{6-2x}} + \frac{3\sqrt{6-2x}}{1} \times \frac{\sqrt{6-2x}}{\sqrt{6-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{6-2x}} + \frac{3(6-2x)}{\sqrt{6-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{6-2x}} + \frac{18-6x}{\sqrt{6-2x}} = \frac{18-9x}{\sqrt{6-2x}}$$

PARAGRAAF 9.3 : DE TWEDE AFGELEIDE

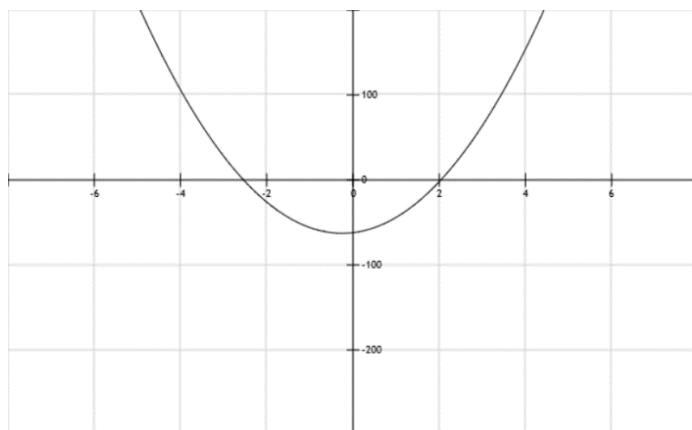
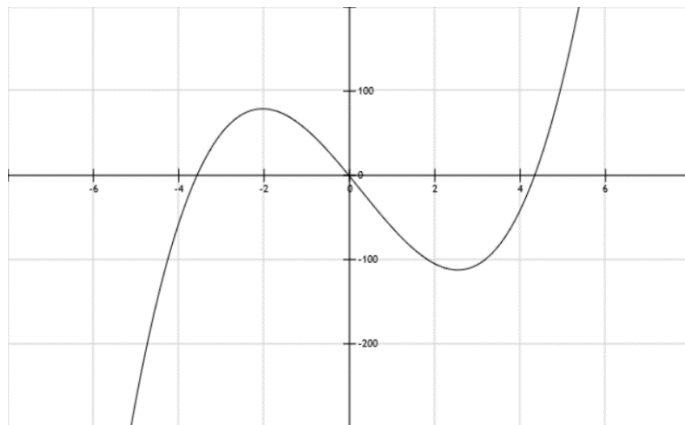
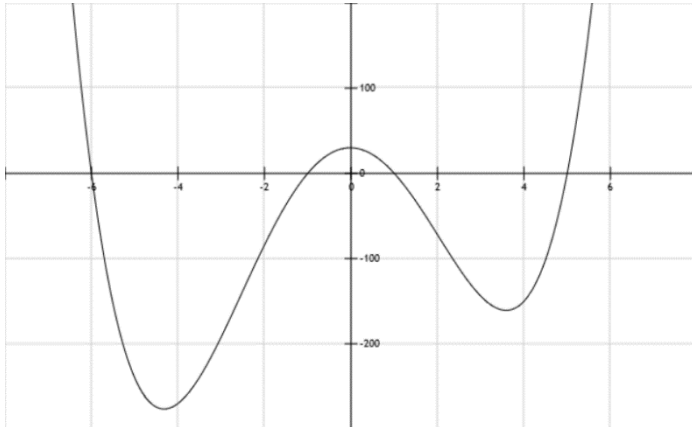
DEFINITIE BUIGPUNTEN

- (1) Buigpunt = { Punt waar de helling maximaal of minimaal is }
- (2) Buigpunt berekenen $\Leftrightarrow f'(x)$ heeft een top $\Leftrightarrow f''(x) = 0$
- (3) Bij een buigpunt :
Is er een top bij $f'(x)$ $\rightarrow$ Helling is maximaal of minimaal
- (4) Buigraaklijn = { Raaklijn in het buigpunt }

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $f(x) = x^4 + x^3 - 31x^2 - x + 30$. Van deze formule de grafieken van $f(x)$, $f'(x)$ en $f''(x)$ geschetst.

Geef aan waar de buigpunten zitten in alle 3 de grafieken.



OPLOSSING 1

Buigpunten

1. Bij $f''(x) \rightarrow$ Als $f''(x) = 0$ dus bij $x = -2\frac{1}{2}$ en $x = 2$
2. Bij $f(x) \rightarrow$ Overgang van toenemend stijgend/dalend naar afnemend stijgend/dalend
3. Bij $f(x) \rightarrow$ Overgang van toenemend stijgend/dalend naar afnemend stijgend/dalend

VOORBEELD 2

Gegeven is de formule $f(x) = 3x^4 - 12x^3 + 2$

- a. Bereken de buigpunten.
- b. Bereken de buigraaklijn(en).

OPLOSSING 2

- a. $f'(x) = 12x^3 - 36x^2$
 $f''(x) = 36x^2 - 72x = 0 \Leftrightarrow 36x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
 $x = 0 \rightarrow y = 2$ dus $(0, 2)$
 $x = 2 \rightarrow y = -46$ dus $(2, -46)$

Controle : Kijk in $f'(x)$. Er is een top bij $x = 0$ en bij $x = 2$. Daarom zijn dit twee buigpunten.

- b. Raaklijn in $x=0$
 - (1) $a = f'(0) = 0$
 - (2) $y = 2$
 - (3) Raaklijn : $y = 2$

Raaklijn in $x=2$

- (1) $a = f'(2) = -48$
- (2) $y = -46$
- (3) $-46 = -48 \cdot 2 + b \rightarrow b = 50$
- (4) $y = -48x + 50$

PARAGRAAF 9.4 : SNELHEID EN VERSNELLING

LES 1 : VERSNELLING / SNELHEID / AFSTAND (A / V / S)

DEFINITIE VERSNELLING / SNELHEID / AFSTAND (A / V / S)

- $f(x)$ = afstand (=s) $\rightarrow f'(x)$ = snelheid (=v) $\rightarrow f''(x)$ = versnelling (=a)
- $s' = v$ $\rightarrow s'' = a$ en $v' = a$

VAN AFGELEIDE NAAR GEWONE FUNCTIE (INTEGREREN)

Om van de afgeleide naar de gewone functie te gaan moet je de functie INTEGREREN.

Een paar regels :

INTEGREERREGELS

(1) Kwadratisch :	$f(x) = ax^2$	$\rightarrow f(x) = \frac{1}{3}ax^3$
(2) lineair :	$f(x) = ax$	$\rightarrow f(x) = \frac{1}{2}ax^2$
(3) Constant :	$f'(x) = a$	$\rightarrow f(x) = ax$

VOORBEELD 1

Op $t = 0$ is de versnelling 20 m/s^2 en op $t = 10$ is de versnelling 0.

Bereken de afgelegde afstand als gegeven is dat de versnelling lineair is t.o.v. de tijd.

OPLOSSING 1

(1) De versnelling is lineair en op $t = 0$ is $a = 20$

$$\text{Dus : } a = pt + 20$$

Vul $(10,0)$ in :

$$0 = p \cdot 10 + 20$$

$$p = -2.$$

(2) Dus $a = -2t + 20$. Integreren geeft

$$v = -t^2 + 20t$$

$$s = -\frac{1}{3}t^3 + 10t^2$$

(3) Na 10 seconden is de afgelegde afstand : $s = -\frac{1}{3} \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 = 667 \text{ meter}$