PARAGRAAF 9.1 : LOGARITMISCHE EN EXPONENTIELE VERGELIJKINGEN

LES 1 LOGARITMEN

DEFINITIE LOGARITMEN

- **Hoofdregel :** **$g^t = b \Leftrightarrow t = {}^g\log b$** **met domein b>0**
- Om logaritmen uit je hoofd uit te rekenen kun je de volgende regel gebruiken :
  ${}^g\log g^t = t$

VOORBEELD 1

Bereken uit je hoofd

a. ${}^3\log 9 =$

b. ${}^3\log \sqrt{27} =$

c. ${}^2\log ½ =$

d. ${}^3\log 5 =$

OPLOSSING 1

a. ${}^3\log 9 = {}^3\log 3^2 = 2$

b. ${}^3\log \sqrt{27} = {}^3\log 27^{½} = {}^3\log (3^3)^{½} = {}^3\log 3^{1½} = 1½$

c. ${}^2\log ½ = {}^2\log 2^{-1} = -1$

d. Dit kan niet dus : x = ${}^3\log 5$. { = (log 5) / (log 3) = 1,46 of met de knop Logbase }

DEFINITIE : REKENREGELS LOGARITMEN

(1) $^{g}\log a + {}^{g}\log b = {}^{g}\log ab$

(2) $^{g}\log a - {}^{g}\log b = {}^{g}\log (a/b)$

(3) $^{g}\log a^{k} = k \cdot {}^{g}\log a$

(4) $^{g}\log a = (\log a) / (\log g)$

(5) $^{g}\log (1) = 0$

(6) $^{g}\log g^{t} = t$

(7) $\log a = {}^{10}\log a$

VOORBEELD 2

Bereken exact met de rekenregels

a. $^{3}\log 6 + {}^{3}\log 12 =$ {

b. $^{2}\log 8^{2} =$ { $= 2 \cdot {}^{2}\log 8 = 2 \cdot {}^{2}\log 2^{3} = 2 \cdot 3 = 6$ }

c. $^{3}\log 36 - {}^{3}\log 12 =$ { $= {}^{3}\log 36 : 12 = {}^{3}\log 3 = 1$ }

OPLOSSING 2

a. $^{3}\log 6 + {}^{3}\log 12 = {}^{3}\log (6 \cdot 12) = {}^{3}\log 72$

b. $^{2}\log 8^{2} = 2 \cdot {}^{2}\log 8 = 2 \cdot {}^{2}\log 2^{3} = 2 \cdot 3 = 6$

c. $^{3}\log 36 - {}^{3}\log 12 = {}^{3}\log 36 : 12 = {}^{3}\log 3 = 1$

LES 2 LOGARITMISCHE VERGELIJKINGEN

VOORBEELD 1

Los algebraïsch op

a. $2 + {}^4\log(x) = {}^4\log(12-3x)$

b. ${}^2\log(x+5) - {}^{½}\log(x+2) = 2$

c. ${}^2\log^2(x) - {}^2\log(x) = 6$

OPLOSSING 1

a. Let op het domein : (i) x > 0 en 12 – 3x > 0 ⇔ x > 0 en x < 4 ⇔ 0 < x < 4

$$2 + {}^4\log(x) = {}^4\log(12-3x)$$
$${}^4\log(4^2) + {}^4\log(x) = {}^4\log(12-3x)$$
$${}^4\log(16x) = {}^4\log(12-3x)$$
$$16x = 12 - 3x$$
$$19x = 12$$
$$x = \tfrac{12}{19}$$

b. Let op het domein : (i) x+5 > 0 en x+2 > 0 ⇔ x > -5 en x > -2 ⇔ x > -2

Er geldt ook dat : ${}^{½}\log(x+2) = -{}^2\log(x+2)$ dus

${}^2\log(x+5) + {}^2\log(x+2) = 2$

$${}^2\log(x+5)\cdot(x+2) = {}^2\log(2^2)$$
$${}^2\log(x^2+7x+10) = {}^2\log(4)$$
$$x^2+7x+10 = 4$$
$$x^2+7x+6 = 0$$
$$(x+6)\cdot(x+1) = 0$$
$$x = -6 \quad v \quad x = -1$$
$$(V.N.)$$

c. Let op het domein : (i) x > 0

$({}^2\log(x))^2 + {}^2\log(x) = 6 \qquad \{Stel\ {}^2\log(x) = p\}$

$p^2 + p - 6 = 0$

$(p+3)\cdot(p-2) = 0$

$p = -3 \quad v \quad p = 2$

${}^2\log(x) = -3 \quad v \quad {}^2\log(x) = 2$

$x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \qquad v \qquad x = 4$

LES 3 EXPONENTIELE VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $3 \cdot 4^{2x+1} = 48$

b. $5^{2x} - 5^{x} = 12$

c. $6^{2x+1} - 6^{x-1} = 1$

OPLOSSING 1

a. $4^{2x+1} = 16 = 4^2$

$2x + 1 = 2$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

b. $(5^x)^2 - 5^x - 12 = 0 \qquad \{Stel \quad 5^x = p\}$

$p^2 - p - 12 = 0$

$(p-4)\cdot(p+3) = 0$

$p = 4 \quad v \quad p = -3$

$5^x = 4 \quad v \quad 5^x = -3\,(KN)$

$x = {}^5\log(4)$

c. $6 \cdot 6^{2x} - 6^{-1} \cdot 6^x = 1$

$6 \cdot 6^{2x} - \frac{1}{6} \cdot 6^x - 1 = 0 \qquad \{Stel \quad 6^x = p\}$

$6 \cdot p^2 - \frac{1}{6} p - 1 = 0$

$36p^2 - p - 6 = 0$

$abc-\ formule: \quad p = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+216}}{72} = \dfrac{1 \pm \sqrt{217}}{72}$

PARAGRAAF 9.3 : HET GETAL E

LES 1 : HET GETAL E

We kijken naar een paar afgeleiden

VOORBEELDEN

1. $f(x) = 2{,}5^x$ → $f'(x) = 0{,}916 \cdot 2{,}5^x$
2. $f(x) = 3^x$ → $f'(x) = 1{,}099 \cdot 3^x$
3. $f(x) = 2{,}718..^x = e^x$ → $f'(x) = 1 \cdot e^x = e^x$

Dus er geldt $\boxed{\mathbf{f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x}}$

OPMERKING

Omdat e een getal is (en wel = 2,718…) is $e^2 = 7{,}389..$ ook een getal en dus alle machten zijn getallen

VOORBEELD 1

Herleid

a. $e + e =$

b. $3e^2 + 13e^2 =$

c. $e^{3x} / e^x =$

d. $(ex + e^x)^2 =$

OPLOSSING 1

a. 2^e

b. $16e^2$

c. e^{2x}

d. $e^2x^2 + ex \cdot e^x + ex \cdot e^x + (e^x)^2 = e^2x^2 + 2e \cdot e^x \cdot x + (e^x)^2 = e^2x^2 + e^{x+1} \cdot x + e^{2x}$

VOORBEELD 2

Los algebraïsch op

a. $x\, e^{x} = 2e^{x}$

b. $e^{x} - e^{3x+1} = 0$

OPLOSSING 2

a. $x\, e^{x} - 2e^{x} = 0$

$(x-2)e^{x} = 0$

$x=2 \;\vee\; e^{x} = 0$ (kn)

b. $e^{x} - e^{3x+1} = 0$

$e^{x} = e^{3x+1}$

$x = 3x + 1$

$x = -\frac{1}{2}$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

DEFINITIE DIFFERENTIËREN VAN E-MACHTEN

Hoofdregel voor e-machten **$f(x) = e^x$** → **$f'(x) = e^x$**

OPMERKING

Ook bij e-machten kun je productregel, quotiëntregel of kettingregel nodig hebben!!!

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 5e^x$

b. $f(x) = 4xe^x$

c. $f(x) = 5e^{10-2x}$

d. $f(x) = 3e^2$

e. $f(x) = (3x-5) / e^{2x}$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 5e^x$

b. $f(x) = 4x \cdot e^x + 4 \cdot e^x$ { PRODUCTREGEL }

c. $f(x) = 5e^{10-2x} \cdot -2$ { KETTINGREGEL }

d. $f(x) = 0$ { e2 = 7,389… IS EEN GETAL }

e. $f'(x) = \frac{e^{2x} \cdot 2 \cdot (3x-5) - 3e^{2x}}{e^{4x}}$

PARAGRAAF 9.4 : DE NATUURLIJKE LOGARITME { LN(X) }

VOORBEELD 1

Los de volgende vergelijkingen exact op. Denk aan de regel : $g^t = b \Leftrightarrow {}^g\log(b) = t$.

a. $e^x = 10$

b. $e^{2x+5} = 18$

OPLOSSING 1

a. $e^x = 10$

$x = {}^e\log(10)$

b. $e^{2x+5} = 18$

$2x+5 = {}^e\log(18)$

$2x = {}^e\log(18) - 5$

$x = ½ \cdot {}^e\log(18) - 2\,½$

DEFINITIES LN(X)

- Omdat ${}^e\log(x)$ heel vaak voorkomt is er een extra naam bedacht voor deze formule en dat is $\ln(x)$

  Dus : $\boldsymbol{{}^e\log(x) = \ln(x)}$
- Omdat geldt dat ${}^g\log(g^x) = x$ geldt ook dat : ${}^e\log(e^x) = \ln(e^x) = x$
- Er geldt dus ook : $\ln(e^3) = 3$ en $\ln(e) = \ln(e^1) = 1$
- Omdat ln(x) een logaritme is gelden alle logaritme regels!!!

VOORBEELD 2

Herleid tot één geheel

a. $\ln(e^2) =$

b. $\ln(3) + \ln(13) =$

c. $\ln^2(e) + 2 =$

d. $\ln(3) + 2 =$

OPLOSSING 2

a. $\ln(e^2) = {}^e\log(e^2) = 2$

b. $\ln(3) + \ln(13) = \ln(3 \cdot 13) = \ln(39)$

c. $\ln^2(e) + 2 = (\ln(e))^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$

d. $\ln(3) + 2 = \ln(3) + \ln(e^2) = \ln(3e^2)$

VOORBEELD 3

Los de vergelijkingen exact op

a. $\ln(2x) = 3$

b. $2x \ln(x) = \ln(x)$

c. $\ln(x) - \ln(3x+1) = 1$

OPLOSSING 3

Denk aan de regel : $g^t = b \Leftrightarrow {}^g\log(b) = t$

a. ${}^e\log(2x) = 3$

$2x = e^3$

$x = ½\, e^3$

b. $2x \ln(x) = \ln(x)$

$2x \ln(x) – \ln(x) = 0$

$\ln(x) [2x – 1] = 0$

$\ln(x) = 0 \quad v \quad 2x – 1 = 0$

$x = e^0 = 1 \quad v \quad x = ½$

c. $\ln(x+1) – \ln(x) = 1$

$\ln((x+1) / x) = 1$

$(x+1) / x = e$

$x+1 = ex$

$x – ex = -1$

$x(e – 1) = -1$

$x = -1/(e – 1)$

LES 2 : DIFFERENTIËREN VAN DE NATUURLIJKE LOGARITME LN(X)

DEFINITIE DIFFERENTIËREN VAN LN(X)

- **Hoofdregel :** $\boldsymbol{f(x) = ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$
- **Hulpregel :** $\boldsymbol{f(x) = {}^{g}\log(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x ln(g)}}$

VOORBEELD 1

Differentieer

a. $f(x) = 3xln(x)$

b. $f(x) = \ln(x^2 + 5x)$

c. $f(x) = \ln^3(x)$

d. $f(x) = {}^{3}\log(6x + 7)$

OPLOSSING 1

Differentieer

a. $f'(x) = 3x \cdot ln(x) + 3 \cdot \frac{1}{x} = 3xln(x) + \frac{3}{x}$

b. $f'(x) = \frac{1}{x^2+5x} \cdot (2x + 5) = \frac{(2x+5)}{x^2+5x}$

c. $f'(x) = 3 \cdot \ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}$ { KETTINGREGEL MET u = ln(x) }

d. $f'(x) = \frac{1}{(6x+7)ln(3)} \cdot 6$