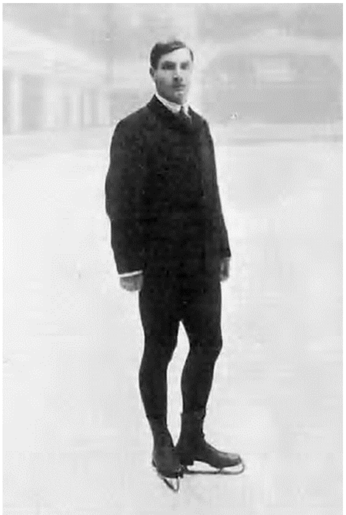
Kunstrijden op de schaats



Ulrich Salchow

Kunstrijden op de schaats werd als olympische sport voor het eerst beoefend in 1908. Veel deelnemers waren er niet: bij de mannen streden slechts zeven kunstschaatsers om de eer. Het waren Johansson, Salchow en Thorén uit Zweden, Greig en March uit Groot-Brittannië, Brokaw uit de Verenigde Staten en Torromé uit Argentinië.
Ook de beoordeling was nog niet geprofessionaliseerd. Er waren slechts vijf juryleden met een overzichtelijke taak. Ze moesten, nadat alle deelnemers hun kwaliteiten hadden laten zien, ieder voor zich een ranglijst opstellen: welke kunstschaatser is volgens hen nummer één, wie komt op de tweede plaats, enzovoort.

Een jurylid vond dat de drie Zweedse kunstrijders het best gepresteerd hadden. Hij plaatste deze schaatsers in zijn top 3, de overige kwamen dus op de plaatsen 4 tot en met 7.

4p **1** Bereken op hoeveel manieren dit jurylid op deze manier zijn volledige ranglijst had kunnen invullen.

Om de mate van overeenstemming bij de juryleden te onderzoeken, worden de ranglijsten van elk tweetal juryleden met elkaar vergeleken.

3p **2** Bereken hoeveel keer men zo twee ranglijsten met elkaar moet vergelijken.

Er kan worden berekend in welke mate de ranglijsten van twee verschillende juryleden met elkaar in overeenstemming zijn. Deze mate van overeenstemming wordt **correlatie** genoemd. Hoe meer overeenstemming, hoe groter de correlatie.
In de tabel zie je de ranglijsten van jurylid 1 en jurylid 2. Van elke kunstrijder is het (positieve) verschil in plaatsing v tussen de ranglijsten van deze twee juryleden berekend en ook de kwadraten van deze verschillen v^2. De som van deze kwadraten noemt men S.

tabel

Naam kunstrijder	**jurylid 1**	**jurylid 2**	v	v^2
Salchow	1	2	1	1
Johansson	2	3	1	1
Thorén	3	1	2	4
Greig	4	5	1	1
March	5	4	1	1
Brokaw	6	7	1	1
Torromé	7	6	1	1
				S = 10

Vervolgens berekent men de correlatie C met de formule

$$C = 1 - \frac{6 \cdot S}{n \cdot (n^2 - 1)}$$

Hierin is n het aantal kunstrijders.

Je kunt narekenen dat de correlatie tussen de ranglijsten van de juryleden uit het voorbeeld in de tabel ongeveer 0,82 is. Als hun ranglijsten nog meer zouden overeenstemmen, zou hun correlatie nog groter zijn.

3p **3** Beredeneer aan de hand van de formule hoe groot de correlatie tussen de ranglijsten van twee juryleden maximaal kan zijn.

In dit voorbeeld is $n = 7$. Daarmee kan de formule worden geschreven als

$$C = 1 - \frac{6 \cdot S}{7 \cdot (7^2 - 1)}$$

Deze laatste formule kan ook worden geschreven in de vorm $C = a \cdot S + b$. Hierin zijn a en b getallen.

3p **4** Geef de waarden van a en b.

Ranglijsten die niet erg met elkaar overeenstemmen, hebben een kleine of zelfs negatieve correlatie. De ranglijsten van jurylid 2 en jurylid 3 hebben een correlatie die kleiner is dan 0,75.

4p **5** Geef in de tabel op de uitwerkbijlage een mogelijke ranglijst voor jurylid 3. Laat met berekeningen zien dat de correlatie inderdaad kleiner is dan 0,75.

uitwerkbijlage

5

Naam kunstrijder	**jurylid 1**	**jurylid 2**	v	^{2}
Salchow	1			
Johansson	2			
Thorén	3			
Greig	4			
March	5			
Brokaw	6			
Torromé	7			
				$S = \ldots$

Licht en kleur

Een vel helderwit papier ziet er niet altijd helderwit uit: bij kunstlicht is de kleur van het papier anders dan bij kaarslicht of bij het licht van de middagzon. Dat wordt veroorzaakt door het omgevingslicht. Een maat voor dit omgevingslicht is de **kleurtemperatuur** die wordt gemeten in kelvin (K).
Professionele fotografen gebruiken in plaats van kleurtemperatuur liever een andere maat, de **miredwaarde**. In de tabel vind je voor verschillende soorten licht de kleurtemperatuur T en de bijbehorende miredwaarde M.

tabel

omgevingslicht	kleurtemperatuur T (K)	miredwaarde M (mired)
kaarslicht	1200	833
zonsopkomst en zonsondergang	2000	500
halogeenlamp	3200	312
middagzon	6000	167

Er is een omgekeerd evenredig verband tussen de kleurtemperatuur T en de miredwaarde M.

3p **6** Toon aan dat de tabel hiermee in overeenstemming is. Gebruik alle waarden in de tabel.

Een professionele fotograaf gebruikt altijd zijn cameraflitser. Voor een goede foto is het een eis dat de kleurtemperatuur van de cameraflitser gelijk is aan de kleurtemperatuur van het omgevingslicht. Als dat niet het geval is, gebruikt hij een filter om de kleurtemperatuur te verhogen of te verlagen.

Om de miredwaarde van het benodigde filter te bepalen, wordt de volgende formule gebruikt:

$$T = \frac{1\,000\,000}{200 + M_f}$$

In deze formule is T de kleurtemperatuur van het omgevingslicht in K en M_f de miredwaarde van het gebruikte filter.

Een fotograaf maakt een foto in zijn studio die wordt verlicht door studiolampen met een kleurtemperatuur van 3000 K. Om te kunnen flitsen met dezelfde kleurtemperatuur moet de fotograaf zijn cameraflitser voorzien van een filter.

3p **7** Bereken de miredwaarde van dit filter.

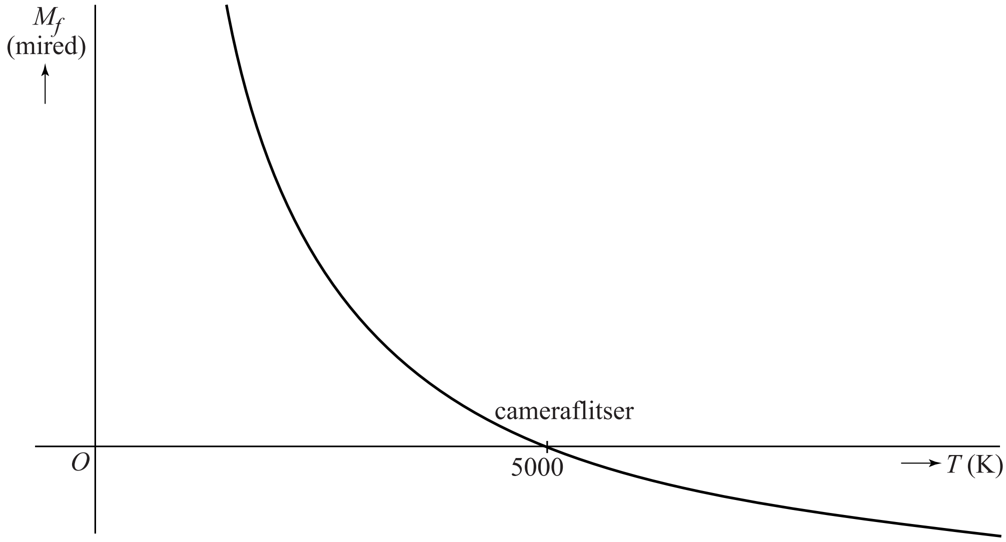
Omdat de miredwaarde van een filter wordt bepaald op basis van de kleurtemperatuur van het omgevingslicht, is het handig om de formule te herleiden tot een formule van de vorm

$M_f = \frac{a}{T} + b$, waarbij a en b getallen zijn.

3p **8** Laat deze herleiding zien.

In de figuur zie je een globale grafiek van M_f die hoort bij bovenstaande situatie. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur



De kleurtemperatuur van de cameraflitser is 5000 K. Je kunt in de figuur zien dat er geen filter nodig is als de kleurtemperatuur T van het omgevingslicht gelijk is aan 5000 K. We bekijken nu twee gevallen:

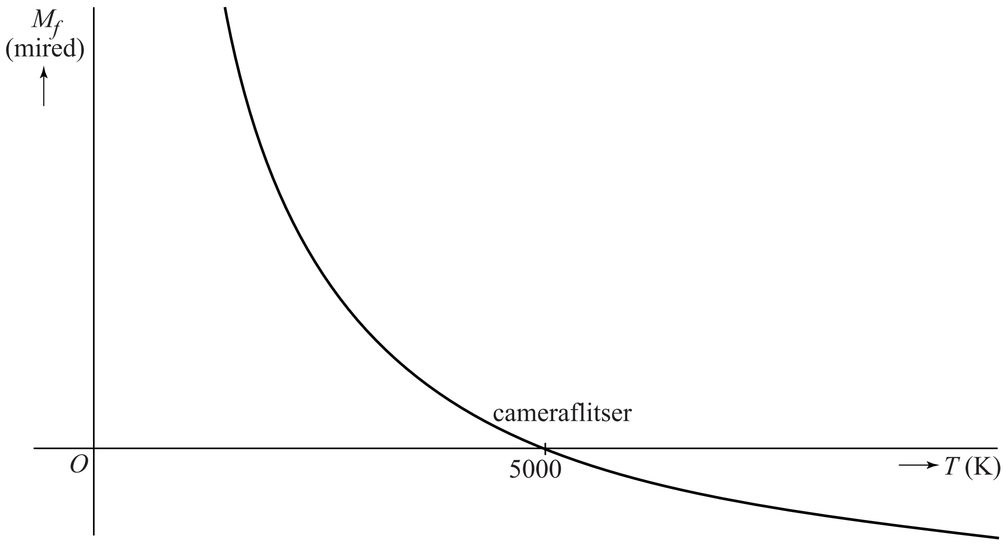
– T is lager dan 5000 K. Er is een filter met een positieve miredwaarde nodig.
– T is hoger dan 5000 K. Er is een filter met een negatieve miredwaarde nodig.

Neem aan dat in beide gevallen de kleurtemperatuur T evenveel afwijkt van 5000 K.

3p **9** Onderzoek met behulp van de grafiek op de uitwerkbijlage of de miredwaarden van de benodigde filters dan ook even veel afwijken van nul.

uitwerkbijlage

9



Huwelijksjubilea

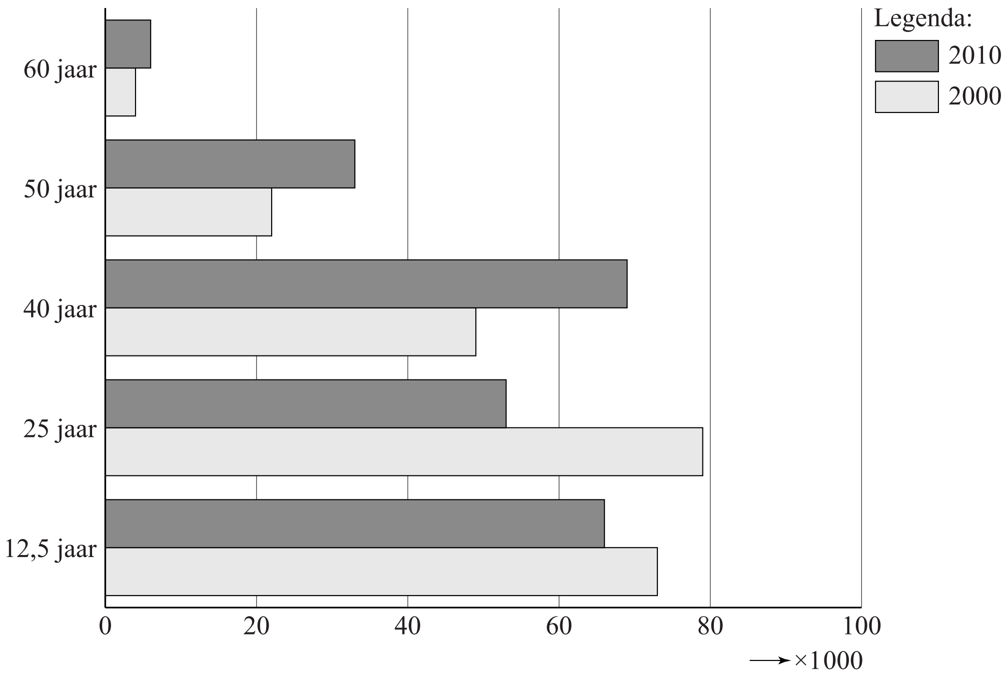
In 1970 trouwden in Nederland maar liefst 124 000 paren, een historisch record. Veertig jaar later, in 2010, was er dan ook een piek te zien in het aantal paren dat het 40-jarig huwelijksjubileum vierde.

In totaal waren er in Nederland in het jaar 2010 ongeveer 770 000 paren 40 jaar of zelfs langer gehuwd. Dit aantal is vergeleken met het jaar 2000 met 40 procent toegenomen.

3p **10** Bereken hoeveel paren er in het jaar 2000 minstens 40 jaar gehuwd waren.

Het aantal jubilea vanwege een 40-, 50- of 60-jarig huwelijk was in het jaar 2010 flink hoger dan in 2000. Daarentegen waren er minder 12,5- en 25-jarige jubilea. Dit kun je zien in figuur 1.

figuur 1 Aantal huwelijksjubilea



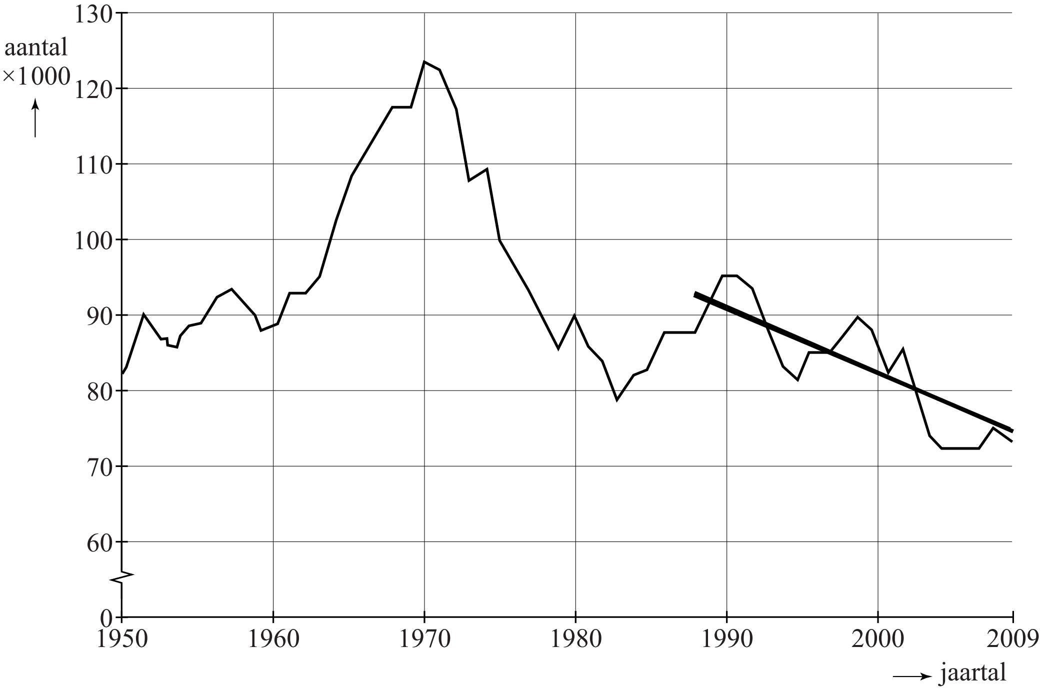
3p **11** Met hoeveel procent is het aantal 25-jarige huwelijksjubilea afgenomen?

In 1970 trouwden zoals gezegd 124 000 paren. In 1980 traden 90 000 paren in het huwelijk. Veronderstel dat er bij deze paren in verhouding evenveel huwelijken minstens 40 jaar zullen standhouden als bij de paren die in 1970 in het huwelijk traden.

3p **12** Bereken hoeveel 40-jarige huwelijksjubilea men dan in het jaar 2020 mag verwachten.

In figuur 2 is te zien hoeveel huwelijkssluitingen er in de jaren 1950 tot en met 2009 waren.

figuur 2 Aantal huwelijkssluitingen



Vanaf ongeveer 1988 lijkt er een dalende trend te zijn in het aantal huwelijkssluitingen. In de grafiek is een trendlijn getekend.
De formule van deze lijn is van de vorm $A = a \cdot t + b$.

Hierin is A het aantal gesloten huwelijken in duizendtallen en t de tijd in jaren met $t = 0$ in 1988.

4p **13** Bereken a en b.

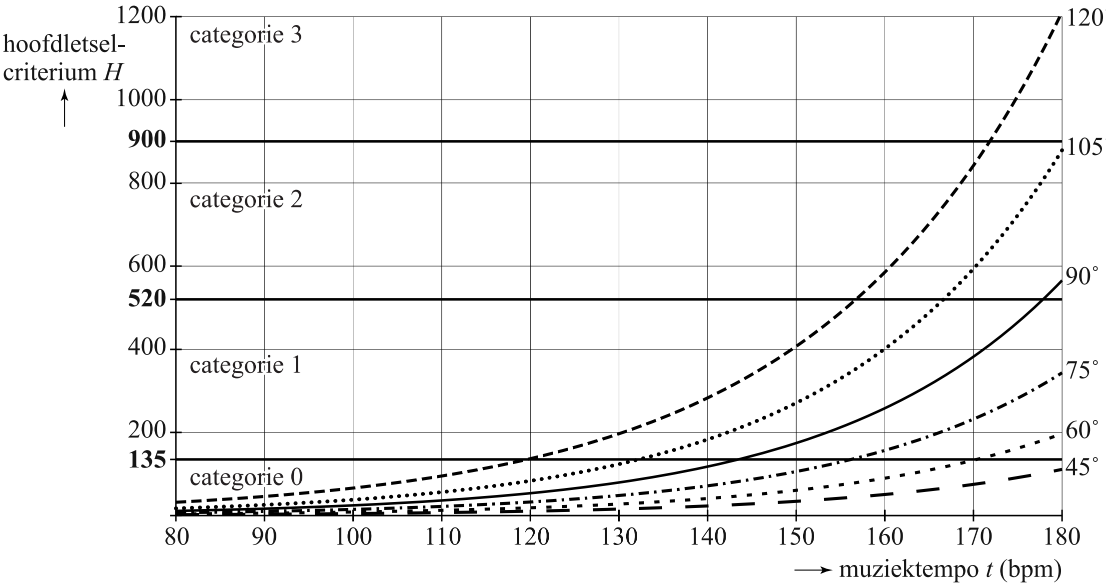
Het percentage huwelijken dat minstens 40 jaar standhoudt, is bij huwelijken die gesloten zijn in 1960 ongeveer even groot als bij huwelijken die in 1970 zijn gesloten. Dit kun je met behulp van de figuren 1 en 2 narekenen. De vraag is of dat ook voor de andere jubilea geldt.
Een onderzoeker stelt het volgende: “Als we kijken naar het aantal echtparen dat in 2000 en 2010 het 25-jarig huwelijksjubileum vierde, dan zien we een opvallende verandering. Het lijkt erop dat het percentage huwelijken dat 25 jaar standhoudt, in deze 10 jaar is gedaald.”

5p **14** Ga met berekeningen na of deze onderzoeker gelijk heeft. Gebruik hierbij de figuren 1 en 2.

Pas op je hoofd!

Veel headbangers zijn na een bezoek aan een concert versuft of verward. Twee Australische artsen hebben onderzoek gedaan naar deze klachten. Ze hebben het headbangen (met het hoofd van voor naar achter meezwiepen op de muziek) en de verkregen hoofdletsels bestudeerd. Het blijkt dat de kans op hoofdletsel toeneemt met het tempo van de muziek, uitgedrukt in beats per minute (bpm), en met de grootte van de hoek die het zwiepende hoofd maakt. De resultaten van hun onderzoek vind je in de figuur.

figuur



In de figuur kun je bijvoorbeeld aflezen dat een headbanger die bij een muziektempo van 160 bpm met een hoek van 105° met zijn hoofd zwiept een **hoofdletselcriterium** heeft van ongeveer 400.
Het hoofdletselcriterium is een maat voor de krachten die bij headbangen op het hoofd werken.

Met H_n wordt het hoofdletselcriterium bij een hoek van n graden aangeduid. Bij de grafieken in de figuur kunnen bijpassende formules voor H_n worden opgesteld. Van drie grafieken zijn voor een muziektempo t vanaf 80 bpm de formules gegeven:

$$H_{45} = 2,2 \cdot 1,04^{(t-80)},\ H_{75} = 6,8 \cdot 1,04^{(t-80)} \text{ en } H_{105} = 17,4 \cdot 1,04^{(t-80)}.$$

Het muziektempo van een headbangnummer is 160 bpm.

3p **15** Bepaal hoeveel het hoofdletselcriterium toeneemt als de hoek waarmee het hoofd zwiept toeneemt van 75° naar 105°.

De formule voor het headbangen met een hoek van 120° is niet gegeven. Ook voor deze hoek is er sprake van een exponentieel verband. In de figuur kun je aflezen dat bij een muziektempo van 130 bpm $H_{120} = 200$ en bij een muziektempo van 180 bpm $H_{120} = 1200$.

3p **16** Bereken voor H_{120} de groeifactor per bpm in 3 decimalen nauwkeurig.

De onderzoekers hebben het hoofdletselcriterium in vier gebieden onderverdeeld (zie figuur):
- categorie 0: geen hoofdletsel;
- categorie 1: hoofdpijn, duizeligheid;
- categorie 2: bewusteloos, tot één uur;
- categorie 3: bewusteloos, één tot zes uur.

De grenzen tussen de categorieën 0, 1, 2 en 3 worden gegeven bij een hoofdletselcriterium van respectievelijk 135, 520 en 900.
De eerdergenoemde headbanger die bij een muziektempo van 160 bpm met een hoek van 105° met zijn hoofd zwiept, valt met zijn hoofdletselcriterum in categorie 1 en zal dus last hebben van hoofdpijn en/of duizeligheid.

Bij headbangen met een hoek van 45° hoeft men zich geen zorgen te maken om eventueel hoofdletsel. Met een muziektempo tussen de 80 en 180 bpm zit men dan altijd in categorie 0 omdat het hoofdletselcriterium onder de 135 blijft.
Het muziektempo kan zelfs nog iets verhoogd worden zonder dat er hoofdletsel optreedt.

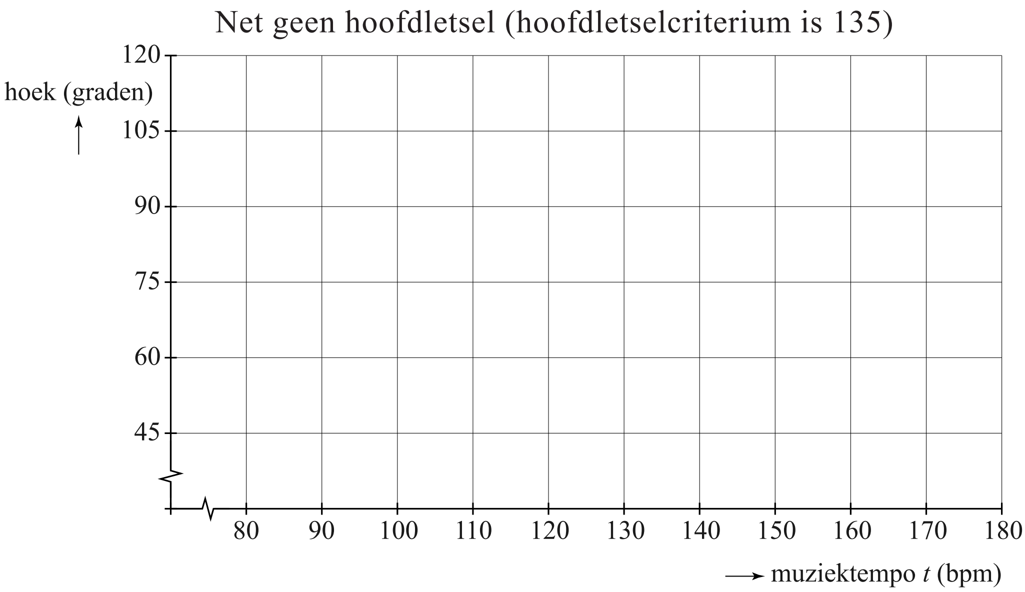
3p **17** Bereken met behulp van de formule van H_{45} vanaf welk muziektempo er hoofdletsel optreedt bij headbangen met een hoek van 45°.

Uit de figuur kun je het volgende afleiden: hoe hoger het muziektempo, des te kleiner moet de hoek waarmee het hoofd zwiept worden om geen hoofdletsel te krijgen.
Dit kun je beter in beeld krijgen door een grafiek te maken waarbij je de hoek uitzet tegen het muziektempo bij een vast hoofdletselcriterium van 135.

4p **18** Teken met behulp van alle informatie die je uit de figuur kunt halen zo'n grafiek op de uitwerkbijlage. Geef duidelijk aan hoe je de grafiek gemaakt hebt.

uitwerkbijlage

18

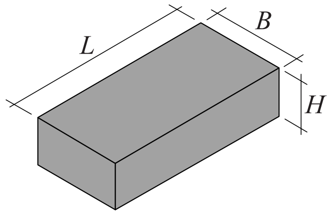


Muurtje metselen

Luc en Laura Vandenbroecke willen langs de tuin een muurtje laten metselen. Bij een gewone baksteen hebben ze de keuze uit verschillende formaten. Zie de tabel.

tabel gewone baksteen, afmetingen in mm

lengte L	breedte B	hoogte H
190	90	50, 57, 65 of 90
290	90, 140 of 190	90, 140 of 190



In de tabel is bijvoorbeeld te zien dat er een gewone baksteen is met een lengte van 290 mm, een breedte van 140 mm en een hoogte van 90 mm. Voor het formaat $L \times B \times H$ van deze baksteen geldt dus $290 \times 140 \times 90$.

Omdat je een baksteen kunt draaien, is een baksteen van $290 \times 140 \times 90$ hetzelfde als een baksteen van $290 \times 90 \times 140$.

4p **19** Bereken hoeveel echt verschillende gewone bakstenen er zijn.

Luc en Laura willen echter graag een antieke baksteen. Deze antieke baksteen is leverbaar in twee formaten. Het kleine formaat heeft afmetingen $190 \times 90 \times 65$ en het grote formaat $220 \times 100 \times 65$. Ze besluiten om één van deze antieke bakstenen te kiezen. De hoogte van de baksteen is dus in ieder geval 65 mm. Om het minimum aantal benodigde bakstenen N te berekenen, gebruiken ze de formule

$$N = \frac{2\,000\,000}{(L+10)(H+10)} \cdot M$$

In deze formule zijn L en H de lengte en de hoogte van de baksteen in mm en is M de muuroppervlakte in m^2.

Het muurtje moet 8,0 meter lang en 2,1 meter hoog worden. De muuroppervlakte is dus 16,8 m^2.

Voor M = 16,8 en H = 65 kan de formule van N herleid worden tot de vorm

$N = \frac{\dots}{\dots \cdot L + \dots}$, waarbij op de puntjes getallen komen te staan.

3p **20** Voer deze herleiding uit.

Als Luc en Laura kiezen voor het kleine formaat antieke baksteen, hebben ze meer bakstenen nodig dan wanneer ze kiezen voor het grote formaat.

3p **21** Bereken hoeveel bakstenen het scheelt bij dit muurtje. Rond je antwoord af op honderdtallen.

Ze besluiten de antieke baksteen in groot formaat te nemen. Tijdens het werk kunnen bakstenen kapotgaan. Als regel wordt daarom uitgegaan van 10% materiaalverlies. Luc en Laura houden er dus rekening mee dat 10% van het aantal bakstenen dat ze bestellen, verloren gaat. Ook besluiten ze om het muurtje iets minder hoog te maken: de hoogte wordt 1,8 meter in plaats van 2,1 meter.

De antieke baksteen in groot formaat is te koop in twee verpakkingen. Een doos met 10 stuks kost € 6,50. Bestellen per pallet is goedkoper: een pallet met 800 stuks kost € 450,00. Luc en Laura bepalen de goedkoopst mogelijke bestelling voor de benodigde bakstenen.

6p **22** Bereken hoeveel euro Luc en Laura moeten betalen voor hun voordeligste bestelling.

Telefoontjes

De directeur van een bedrijf geeft zijn secretaresse de opdracht om naast haar eigenlijke taak voortaan ook de telefoon op te nemen. Daarvoor zal ze het werk waar ze mee bezig is, moeten onderbreken.
De secretaresse is bang dat ze haar werk te vaak zal moet onderbreken vanwege telefoontjes.
De secretaresse en de directeur komen overeen dat het percentage uren waarin ze drie of meer telefoontjes krijgt, niet hoger dan 20% mag zijn. Als dit percentage hoger is, hoeft de secretaresse deze opdracht niet uit te voeren.

De secretaresse gaat dit onderzoeken. Ze besluit daarom de opdracht een week uit te voeren en bij te houden hoeveel telefoontjes ze elk uur krijgt. De resultaten staan in de tabel.

tabel

		aantal telefoontjes per uur tijdens het werk								
		8.00 - 9.00	9.00 - 10.00	10.00 - 11.00	11.00 - 12.00	12.00 - 13.00	13.00 - 14.00	14.00 - 15.00	15.00 - 16.00	16.00 - 17.00
ma	21 mei	vrij	1	2	1	pauze	0	1	4	vrij
di	22 mei	1	0	1	3	pauze	1	1	4	0
wo	23 mei	vrij	2	3	1	pauze	5	vrij	vrij	vrij
do	24 mei	3	0	1	2	pauze	2	3	3	2
vrij	25 mei	1	2	0	1	pauze	0	2	0	1

Verder heeft de secretaresse op het internet een formule gevonden die bij deze situatie past:

$$P = 22{,}3 \cdot \frac{1{,}5^x}{x!}$$

Hierin is P het percentage van de gewerkte uren waarin de secretaresse x telefoontjes krijgt.

7p **23** Onderzoek of de secretaresse de tabel, de formule, of beide, kan gebruiken om bij de directeur te beargumenteren dat ze de opdracht niet hoeft uit te voeren.