Examen HAVO

2011

tijdvak 1
donderdag 19 mei
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 81 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

HA-1025-f-11-1-o

Overlevingstijd

Als iemand in koud water terecht komt, daalt zijn lichaamstemperatuur. Als de lichaamstemperatuur is gedaald tot 30 ºC ontstaat een levensbedreigende situatie. De tijd die verstrijkt tussen het te water raken en het bereiken van een lichaamstemperatuur van 30 ºC wordt de **overlevingstijd** genoemd.

Bij de eerste vier vragen wordt uitgegaan van een persoon die te water is geraakt in gewone kleding en met een reddingsvest. Voor deze persoon geldt de volgende formule:

$$R = 15 + \frac{7,2}{0,0785 - 0,0034T} \qquad \text{met } R > 0 \text{ en } T \geq 5,0$$

Hierin is R de overlevingstijd in minuten en T de watertemperatuur in ºC.

Bij een watertemperatuur van 20 ºC is de overlevingstijd groter dan bij een watertemperatuur van 10 ºC.

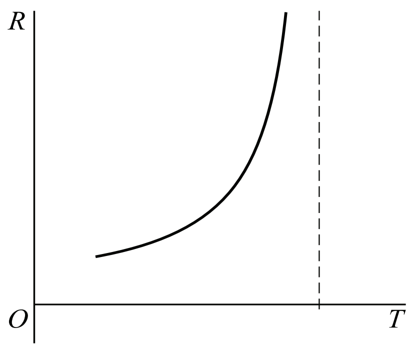
3p **1** Bereken hoeveel keer zo groot.

5p **2** Bereken op algebraïsche wijze de watertemperatuur waarbij de overlevingstijd 5,0 uur is. Rond daarna je antwoord af op een geheel aantal graden.

In de figuur is de grafiek van R als functie van T geschetst. De grafiek heeft een verticale asymptoot.

3p **3** Bereken de waarde van T die bij de verticale asymptoot hoort **en** leg uit wat de betekenis van de verticale asymptoot is voor de situatie van de te water geraakte persoon.

figuur



In de figuur is ook te zien dat de grafiek van R stijgend is. Dit kan worden aangetoond door de functie R te differentiëren.

4p **4** Beredeneer met behulp van differentiëren dat de grafiek van R stijgend is.

De overlevingstijd van personen die te water raken, is niet alleen afhankelijk van de watertemperatuur. De kleding die een persoon draagt, is ook van invloed.
In de tabel staan watertemperaturen met bijbehorende overlevingstijden voor personen in zwemkleding.

tabel

watertemperatuur T in ºC	5,0	10	15	20
overlevingstijd Z in uren	0,5	1,0	2,0	4,0

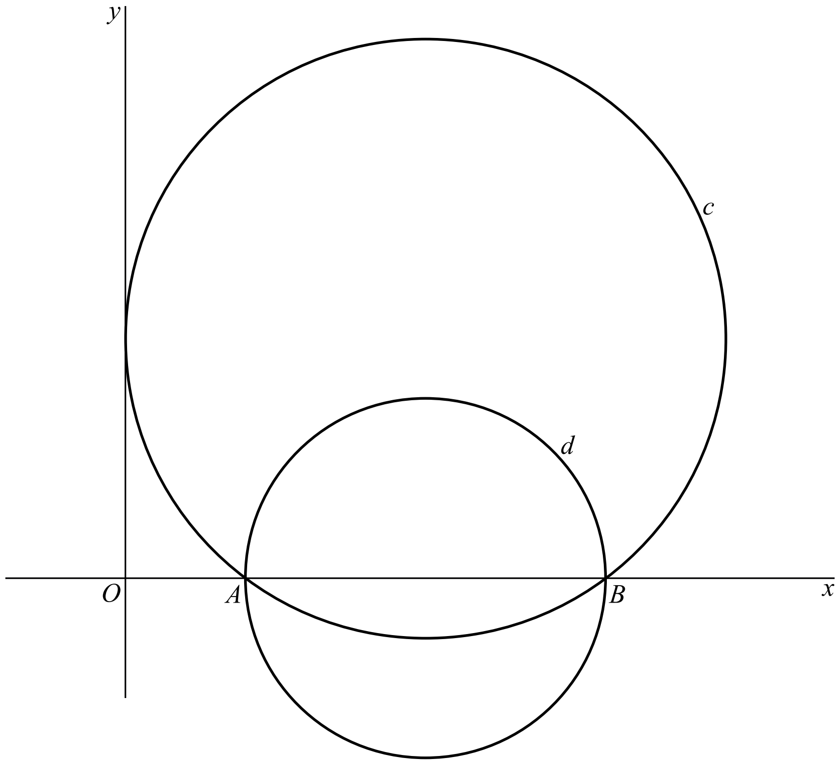
Veronderstel dat er een exponentieel verband bestaat tussen T en Z.

3p **5** Stel een hierbij passende formule op voor het verband tussen T en Z.

Twee cirkels

Gegeven zijn de punten $A(2,\ 0)$ en $B(8,\ 0)$, de cirkel c met vergelijking $x^2-10x+y^2-8y+16=0$ en de cirkel d met middellijn AB. Zie de figuur.

figuur



5p **6** Toon aan dat de cirkel c door de punten A en B gaat en de y-as raakt.

Het punt $P(8,8)$ ligt op de cirkel c. De lijn l raakt de cirkel c in het punt P.

4p **7** Stel een vergelijking op van deze raaklijn l.

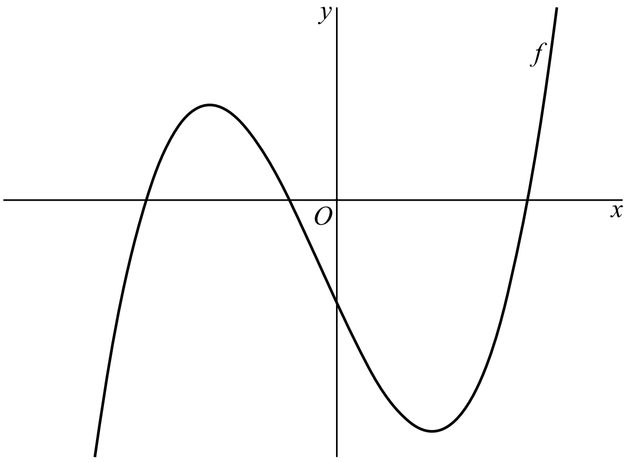
AB is de middellijn van cirkel d. Twee raaklijnen aan de cirkel d gaan door de oorsprong $O(0,0)$.

5p **8** Bereken de hoek die deze raaklijnen met elkaar maken in graden. Rond je antwoord af op één decimaal.

Polynoom

De functie f is gegeven door $f(x) = (x+1)(x^2 - 16)$. Van een van de twee toppen van de grafiek van f is de x-coördinaat positief. Zie figuur 1.

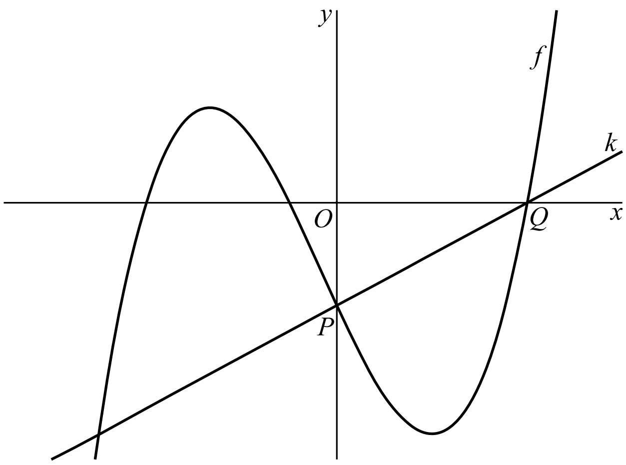
figuur 1



5p **9** Bereken op algebraïsche wijze de coördinaten van deze top.

Punt P is het snijpunt van de grafiek van f met de y-as. Punt Q is het snijpunt van de grafiek van f met de positieve x-as.
Lijn k gaat door de punten P en Q. Zie figuur 2.

figuur 2

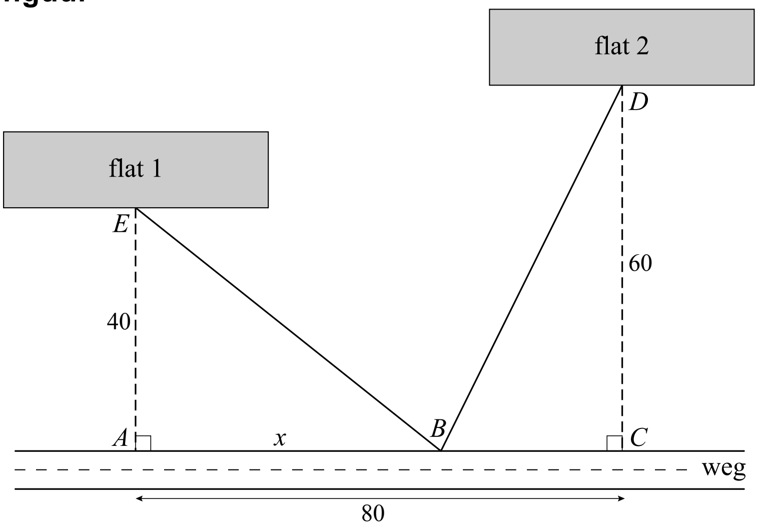


5p **10** Stel op algebraïsche wijze een vergelijking op van k.

Bushalte

Langs een rechte weg staan twee flatgebouwen. De ingang van flat 1 (punt E) ligt 40 meter van de weg af en de ingang van flat 2 (punt D) ligt 60 meter van de weg af. Men wil een bushalte plaatsen (punt B) en daarna van de bushalte naar de ingang van elk van de twee flats een recht voetpad aanleggen. Punt A is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 1 ligt en punt C is het punt aan de weg dat het dichtst bij de ingang van flat 2 ligt. De afstand tussen punt A en punt C is 80 meter. In de figuur is van deze situatie een schematisch bovenaanzicht getekend.

figuur



De lengte van het voetpad tussen de bushalte en de ingang van flat 1 in meters wordt gegeven door de formule $BE = \sqrt{x^2 + 1600}$ en de lengte van het voetpad tussen de bushalte en flat 2 in meters wordt gegeven door de formule $BD = \sqrt{x^2 - 160x + 10\,000}$. Hierin is x de afstand tussen punt A en de bushalte B in meters.

Het is mogelijk de bushalte zo te plaatsen dat de twee voetpaden even lang zijn.

4p **11** Bereken op algebraïsche wijze de waarde van x in deze situatie.

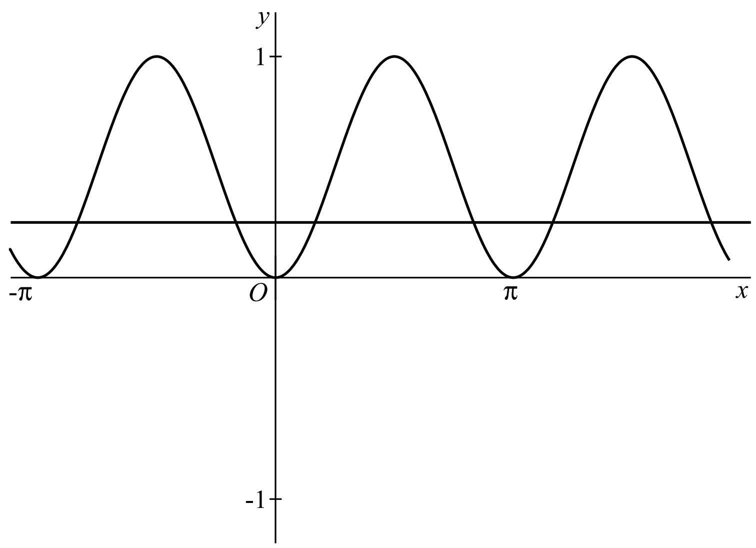
Als de twee voetpaden even lang zijn, is de totale lengte van deze voetpaden (ongeveer) 132 meter. Men wil de bushalte zo plaatsen dat de totale lengte van de twee voetpaden minimaal is.

7p **12** Bereken met behulp van differentiëren hoeveel meter de totale lengte van de twee voetpaden dan minder is dan 132 meter.

Sinusoïde

Van een sinusoïde zijn de punten (0, 0) en ($\frac{1}{2}\pi$, 1) twee opeenvolgende toppen.
In de figuur zie je de sinusoïde en de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{4}$.

figuur



Deze sinusoïde kan worden beschreven door een formule van de vorm $y = a + b \cdot \sin(c(x - d))$.

4p **13** Bepaal mogelijke waarden van a, b, c en d.

Een andere formule die deze sinusoïde beschrijft, is $y = (\sin x)^2$.
In de figuur zijn zes snijpunten te zien van de sinusoïde met de lijn $y = \frac{1}{4}$.

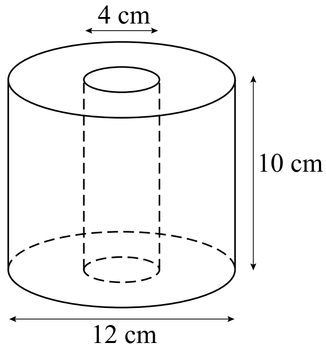
4p **14** Bereken exact de x-coördinaten van deze zes snijpunten.

Toiletpapier

Toiletpapier zit vaak op een rol. In deze opgave wordt een wiskundig model van zo’n rol toiletpapier bekeken. In dit model is de rol een perfecte cilinder waaruit in het midden een cilinder is weggelaten. In de figuur wordt een volle rol toiletpapier weergegeven inclusief afmetingen.

foto

figuur



Het volume aan overgebleven toiletpapier op de rol hangt af van de diameter van de rol volgens de formule $V = \frac{5}{2}\pi d^2 - 40\pi$.

Hierbij is V het volume in cm^3 en d de diameter in cm. Het volume van een volle toiletrol is 320π cm^3.

Het aantal velletjes toiletpapier dat nog op de rol zit, is evenredig met het volume V.

Als van het toiletpapier uit de figuur de helft nog over is, is de diameter van de rol niet gehalveerd.

3p **15** Bereken op algebraïsche wijze de diameter van de toiletrol volgens het model als de helft van het toiletpapier op de rol zit. Rond je antwoord af op een geheel aantal millimeter.

Op een volle rol als in de figuur zitten 500 velletjes. Hieruit volgt het volgende verband tussen het aantal velletjes toiletpapier n en de diameter d:

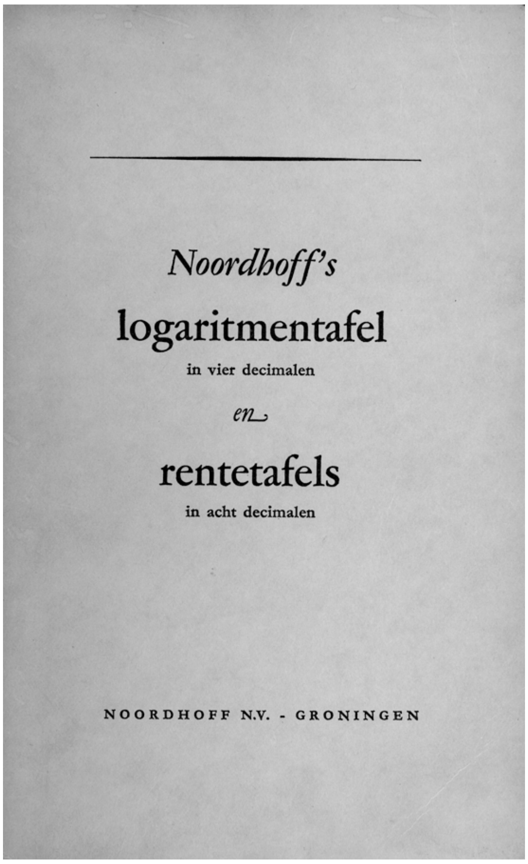
$$n = \frac{125d^2 - 2000}{32}$$

4p **16** Toon de juistheid van deze formule aan.

Logaritmentafel

Wanneer de uitkomst van een logaritme geen geheel getal is, wordt de waarde vaak berekend met behulp van de rekenmachine. 50 jaar geleden waren er nauwelijks rekenmachines. De middelbare scholieren van toen gebruikten tabellenboekjes om de waarde van een logaritme te bepalen. Zie de foto. In de tabel staat een stukje uit zo'n tabellenboekje.

foto



tabel

n	$\log n$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
4	0,6021
5	0,6990
6	0,7782
7	0,8451
8	0,9031
9	0,9542
10	1
100	2
1000	3

Met behulp van de tabel en de rekenregels voor logaritmen is het mogelijk om logaritmische of exponentiële vergelijkingen op te lossen. Hierbij kan, zonder de log-toets van de (grafische) rekenmachine te gebruiken, een benadering van het antwoord gevonden worden.

Voorbeeld: $\log 1\frac{1}{2} = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0,4771 - 0,3010 \approx 0,176$.

3p **17** Bereken $\log 24$ op algebraïsche wijze met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine.

Gegeven is de vergelijking $7^x = 25$.

4p **18** Los deze vergelijking op algebraïsche wijze op met behulp van de tabel, dus zonder gebruik te maken van de log-toets op je rekenmachine. Rond je antwoord af op drie decimalen.

Geocaching

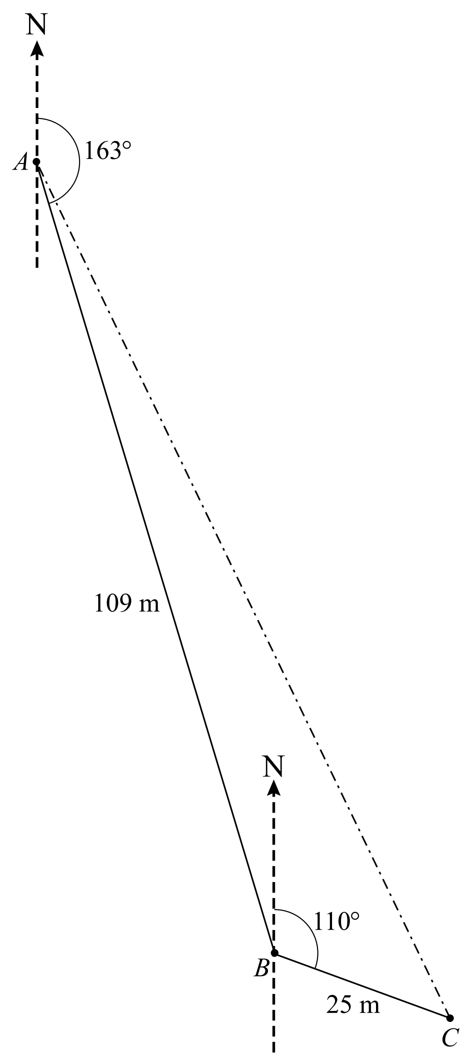
De laatste jaren is het gebruik van GPS (Global Positioning System) flink toegenomen. Met behulp van een GPS-ontvanger kunnen op iedere plaats op aarde de coördinaten van die plaats worden bepaald.

Een wereldwijd beoefende hobby waarbij gebruik gemaakt wordt van GPS is **geocaching**. Bij geocaching is het de bedoeling een **cache** – een soort schatkistje – te zoeken met behulp van een GPS-ontvanger en een **loopopdracht**. Een loopopdracht bestaat uit twee onderdelen: een koers en een afstand. De koers is de hoek ten opzichte van het noorden in een geheel aantal graden. Hierbij worden hoeken gegeven ten opzichte van het noorden met de wijzers van de klok mee. De afstand is gegeven in een geheel aantal meters.

De zoektocht naar de cache genaamd 'Haagse zoektocht' wordt als volgt beschreven:

- Parkeer de auto langs de kant van de weg op N52 16.351 E6 57.531. Dit is punt A.
- Loop vanaf punt A 109 meter met koers 163 graden. Dit is punt B.
- Loop vanaf punt B 25 meter met koers 110 graden naar de cache op punt C.

figuur



Zie de figuur.
Uit de gegevens volgt $\angle ABC = 127°$.

Het is mogelijk om in één loopopdracht vanaf punt A naar punt C te gaan. Hiervoor moet in $\triangle ABC$ eerst de afstand AC berekend worden en vervolgens moet de koers van A naar C berekend worden.

6p **19** Bereken de koers en de afstand van deze loopopdracht.