Examen HAVO

2011

tijdvak 2
woensdag 22 juni
13.30 - 16.30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 19 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Mosselen

Driehoeksmosselen (zie de foto) kunnen een bijdrage leveren aan de vermindering van de hoeveelheid algen in het water. Zij 'filteren' het water.
De hoeveelheid gefilterd water in ml/uur noemen we de **filtercapaciteit** van een mossel. Er bestaat een verband tussen de filtercapaciteit van een driehoeksmossel en zijn schelplengte. Hiervoor geldt de volgende formule:

foto

$$C = \frac{52,7}{1 + 179 \cdot 0,693^{L}}$$

Hierin is C de filtercapaciteit in ml/uur en L is de schelplengte in mm.

Er wordt beweerd dat een driehoeksmossel van 29 mm lang per dag (24 uur) meer dan 1 liter water kan filteren.

3p **1** Onderzoek of deze bewering overeenstemt met de gegeven formule.

In de praktijk blijkt dat de filtercapaciteit van een driehoeksmossel van 29 mm nauwelijks toeneemt als deze driehoeksmossel verder groeit. Dit is in overeenstemming met de formule.

3p **2** Leg uit hoe uit de formule volgt dat de grafiek die bij deze formule hoort een horizontale asymptoot heeft.

Een mossel bestaat voor een deel uit schelp en voor een deel uit vlees. Er bestaat een verband tussen de schelplengte L (in mm) en het gewicht van het vlees W (in grammen) van mosselen.
Elk jaar wordt er onderzoek gedaan naar het verband tussen de schelplengte en het gewicht van het vlees van de gewone mossel in de Waddenzee. Hiervoor worden van een groot aantal van deze mosselen de schelplengte en het gewicht van het vlees gemeten. De resultaten voor het jaar 2006 zijn in de tabel weergegeven. Bij verschillende lengten zijn de gemiddelde vleesgewichten vermeld.

tabel vleesgewicht mosselen in 2006

L (in mm)	30	40	50	60	70
W (in grammen)	0,12	0,28	0,55	0,95	1,51

We nemen aan dat W evenredig is met een macht van L. Bij de tabel hoort dus een formule van de vorm $W = a \cdot L^{b}$. Hierin zijn a en b nog nader te bepalen constanten.

4p **3** Bereken a en b.

In een publicatie over 2005 is het verband tussen W en L gegeven door de formule $\log W = -5,5 + 3,1 \cdot \log L$.
Net als in 2006 is W ook nu evenredig met een macht van L.

4p **4** Werk de formule om tot een formule van de vorm $W = a \cdot L^{b}$.

Functies met een wortel

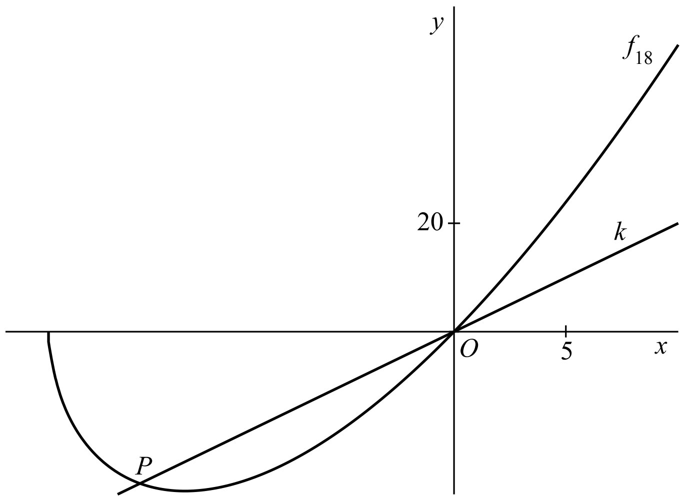
Voor elke waarde van a is de functie f_a gegeven door $f_a(x) = x\sqrt{x+a}$.

Er is een waarde van a waarvoor het punt $(27, 108)$ op de grafiek van f_a ligt.

4p **5** Bereken exact deze waarde van a.

De functie f_{18} is gegeven door $f_{18}(x) = x\sqrt{x+18}$.
In de figuur zijn de grafiek van f_{18} en de lijn k met vergelijking $y = 2x$ getekend.

figuur



De lijn k snijdt de grafiek van f_{18} in twee punten: $O(0, 0)$ en het punt P.

6p **6** Bereken exact de lengte van het lijnstuk OP.

De grafiek van f_{18} wordt 18 naar rechts geschoven.
Zo ontstaat de grafiek van de functie g, met $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

3p **7** Toon op algebraïsche wijze aan dat het gegeven functievoorschrift van g inderdaad bij deze verschuiving hoort.

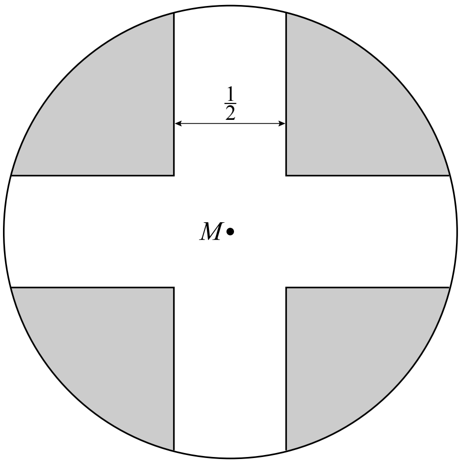
De functie g heeft een minimum.

4p **8** Bereken met behulp van differentiëren voor welke waarde van x dit minimum wordt aangenomen.

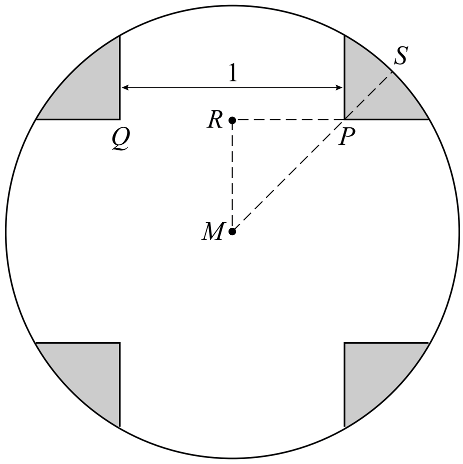
Kruis in cirkel

Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal 1. In deze cirkel is een kruis met vier even brede en even lange armen aangebracht. In de onderstaande figuren is dit kruis wit en zijn de vier vlakdelen die buiten het kruis en binnen de cirkel liggen grijs gemaakt. In figuur 1 is voor de breedte van de armen $\frac{1}{2}$ genomen en in figuur 2 is deze breedte 1. In figuur 2 is te zien welke punten P, Q en S genoemd worden. Het punt R is het midden van PQ.

figuur 1

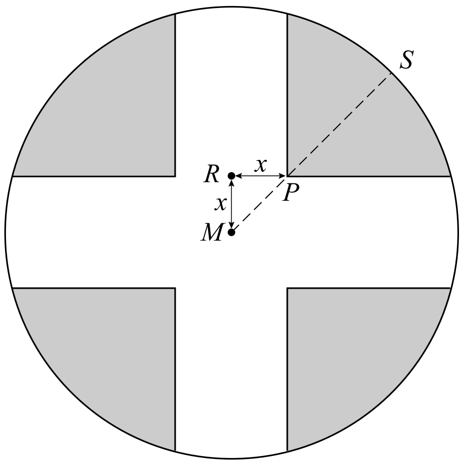


figuur 2



De breedte van de armen van het kruis kan variëren. Hierdoor varieert ook de plaats van de punten P en R. Als voor de breedte van de armen van het kruis $2x$ genomen wordt, betekent dit dat $MR = RP = x$. Zie figuur 3.

figuur 3



Er geldt $PS = 1 - x\sqrt{2}$.

3p **9** Toon dit aan.

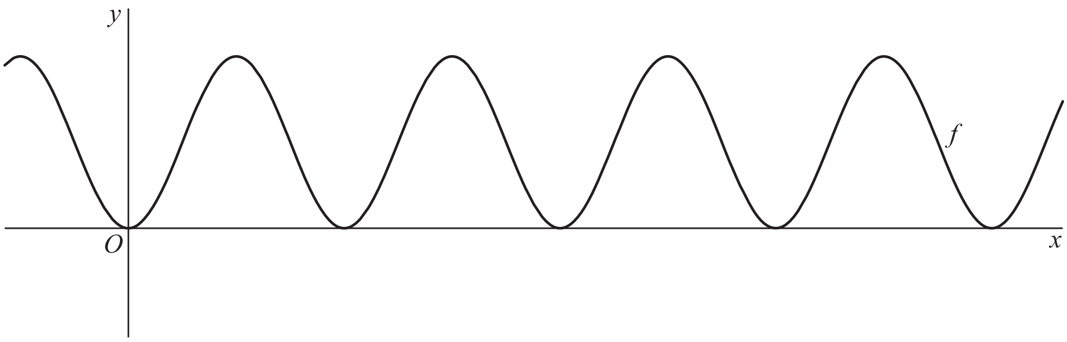
Er is een waarde van x waarvoor geldt $PS = 2 \cdot MP$.

3p **10** Bereken exact deze waarde van x.

Een cosinusfunctie

In de figuur is de grafiek getekend van de functie f gegeven door
$f(x) = (\sin x \cdot \cos x)^2$.

figuur



4p **11** Bereken op algebraïsche wijze de x-coördinaten van de gemeenschappelijke punten van de grafiek van f en de x-as op het interval $[0, \pi]$.

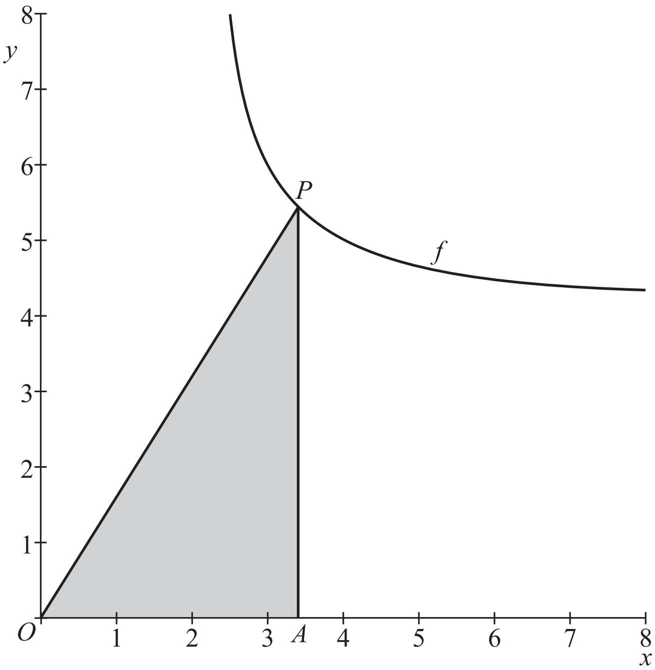
De grafiek van f kan ook worden beschreven door middel van één enkele cosinusfunctie. Er geldt $f(x) = a - b \cdot \cos(cx)$.

6p **12** Bereken a, b en c.

Punt op hyperbool

In de figuur is de grafiek getekend van de functie f gegeven door
$f(x) = \frac{2}{x-2} + 4$, met $x > 2$.

figuur



Op de grafiek van f ligt een punt P met x-coördinaat $x_P = a$. Punt A ligt recht onder P op de x-as en heeft dus dezelfde x-coördinaat als P.

De oppervlakte van driehoek OAP wordt gegeven door:

$$\text{Oppervlakte } \Delta\, OAP = \frac{2a^2 - 3a}{a-2}$$

4p **13** Toon dit aan op algebraïsche wijze.

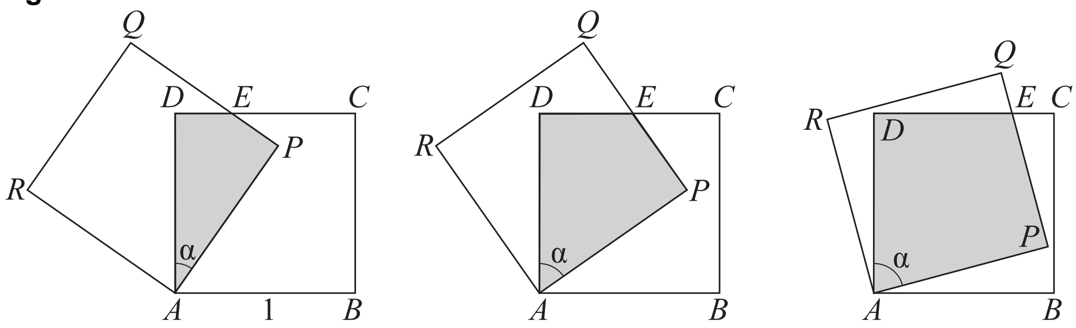
Voor een zekere waarde van a is de oppervlakte van driehoek OAP minimaal.

5p **14** Bereken met behulp van differentiëren deze minimale oppervlakte.

Scharnierende vierkanten

Twee vierkanten $ABCD$ en $APQR$ hebben zijde 1. Vierkant $APQR$ kan scharnieren om punt A en schuift daarbij deels over vierkant $ABCD$. Zo ontstaat een overlapping $APED$. Zie de figuur.

figuur



Hoek DAP wordt α genoemd. Er geldt $0° < \alpha < 90°$. Punt E is het snijpunt van lijnstuk CD en lijnstuk PQ. De overlapping $APED$ is symmetrisch in lijnstuk AE.

4p **15** Bereken de oppervlakte van $APED$ in het geval dat α = 50°. Rond je antwoord af op twee decimalen.

Voor een bepaalde waarde van α is de lengte van lijnstuk BP gelijk aan 0,6.

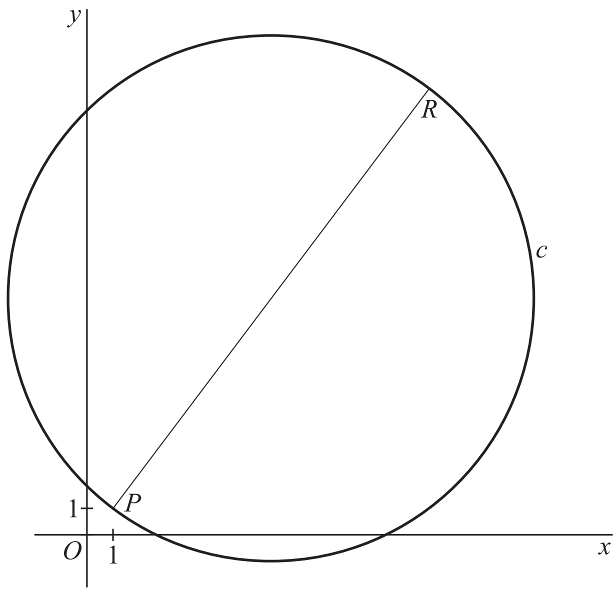
5p **16** Bereken deze waarde van α in hele graden nauwkeurig.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Cirkel om vierhoek

Gegeven zijn de punten $P(1, 1)$ en $R(13, 17)$. PR is een middellijn van cirkel c.
Zie de figuur.

figuur



Een vergelijking van cirkel c is $(x-7)^2+(y-9)^2=100$.

3p **17** Toon dit aan.

Punt S ligt op de cirkel en heeft dezelfde x-coördinaat als punt P. Lijn l gaat door S en staat loodrecht op lijnstuk PR.
Lijn l heeft als vergelijking $y=-\frac{3}{4}x+17\frac{3}{4}$.

5p **18** Toon dit aan.

Punt Q ligt zo op cirkel c, dat vierhoek $PQRS$ symmetrisch is ten opzichte van diagonaal PR.

5p **19** Bereken de coördinaten van punt Q.